

Aula 07 – Lançamentos e parábola de segurança

- SL 10 – Teoria
- SL 11 - Exercícios

Apresentação e demais documentos: **fisicasp.com.br**

Lançamento oblíquo

Eixo x (MU)

$$S_x = S_{0x} + v_{0x} \cdot \Delta t$$

$$v_x = \frac{\Delta S_x}{\Delta t}$$

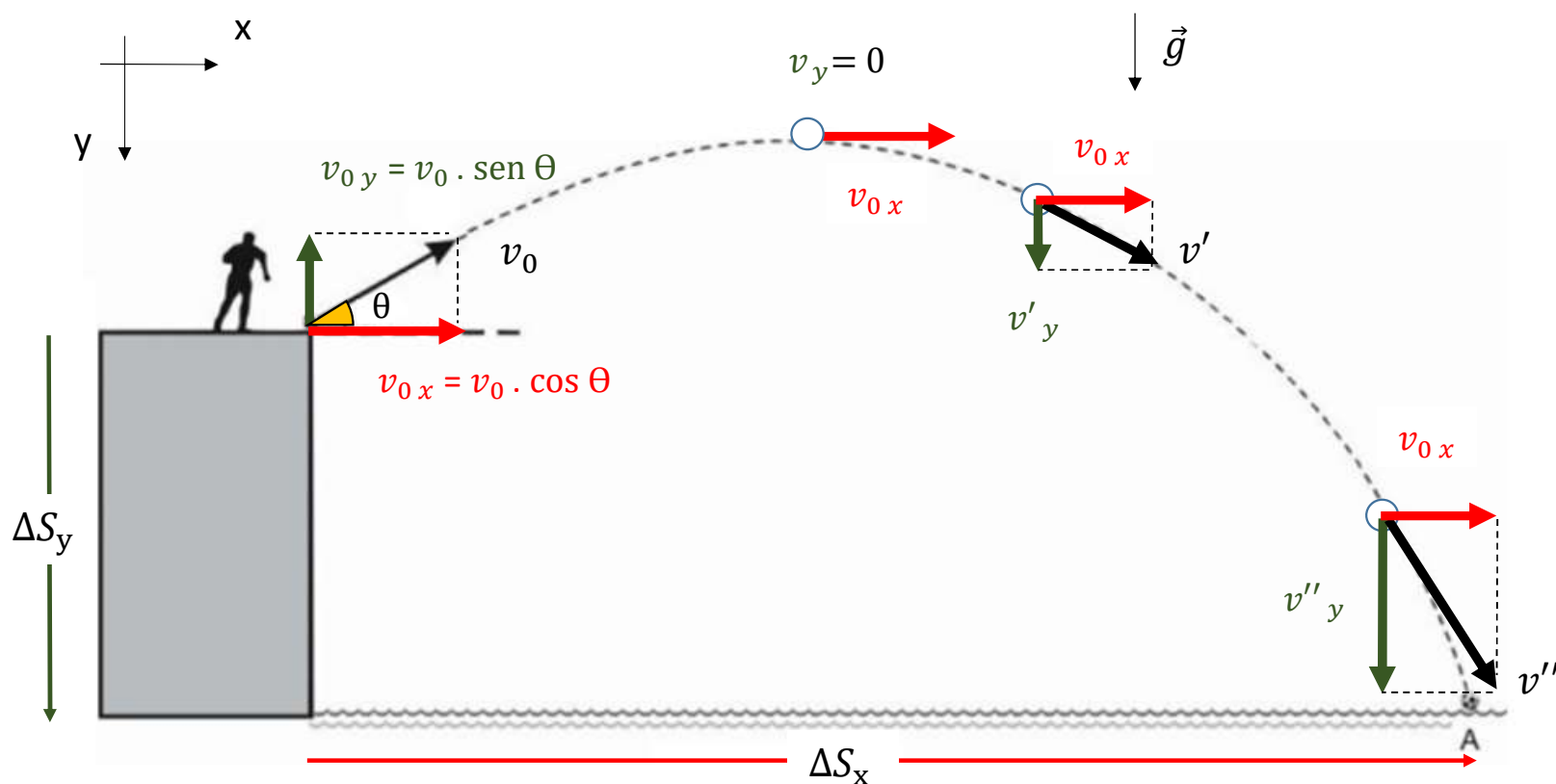
Eixo y (MUV)

$$S_y = S_{0y} + v_{0y} \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2$$

$$V_y = V_{0y} + a \cdot \Delta t$$

$$V_y^2 = V_{0y}^2 + 2a \cdot \Delta S$$

$$a = g$$

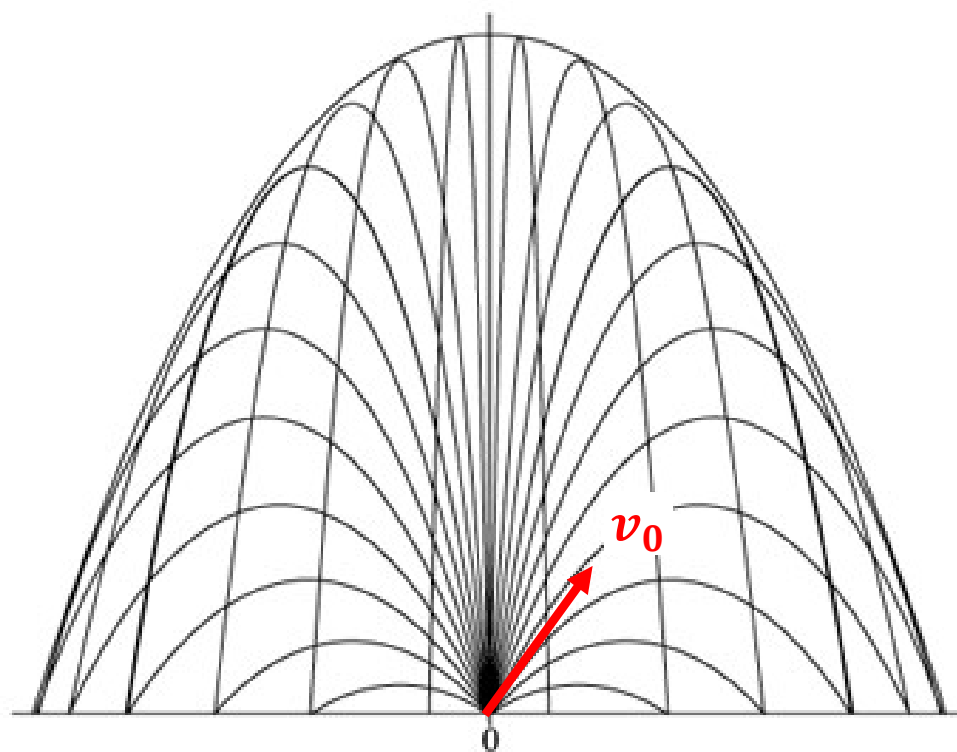


Parábola de segurança

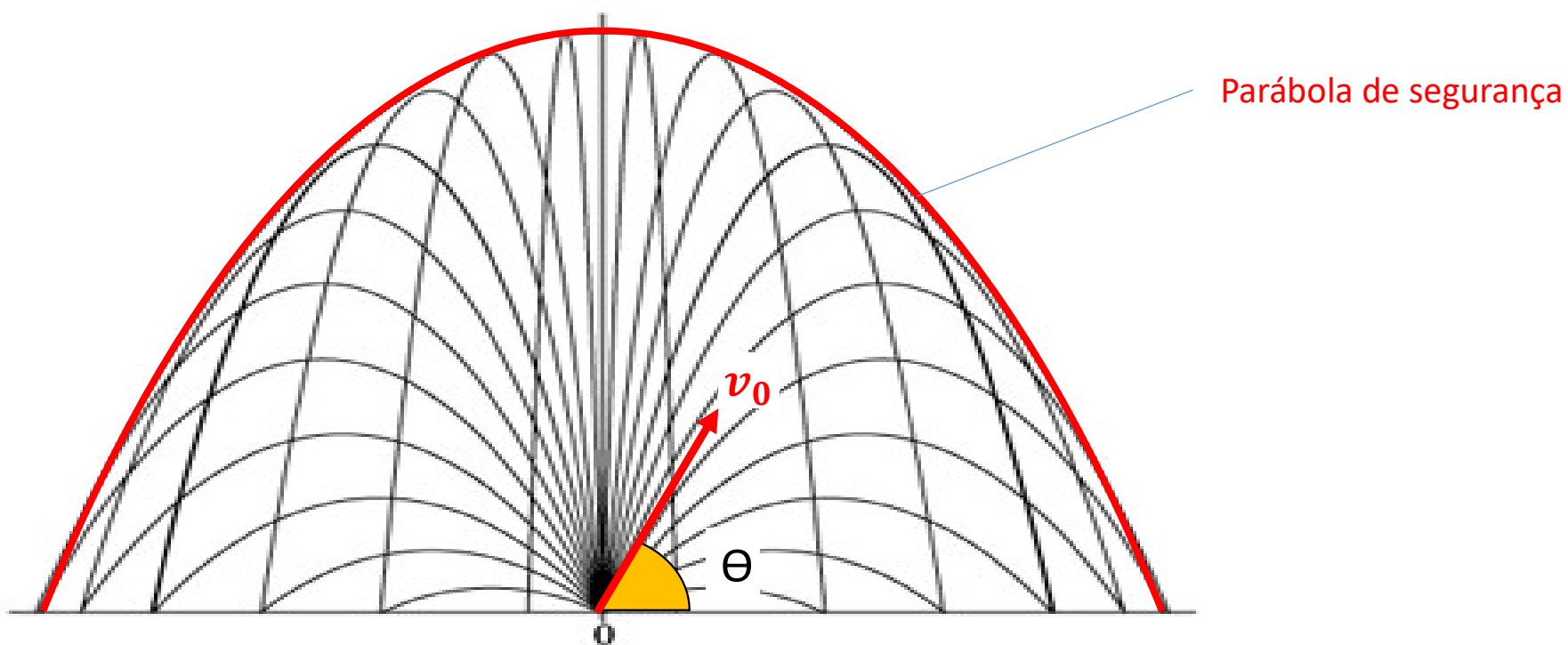
Parábola de segurança



<https://www.geogebra.org/m/zpkgc4uy>

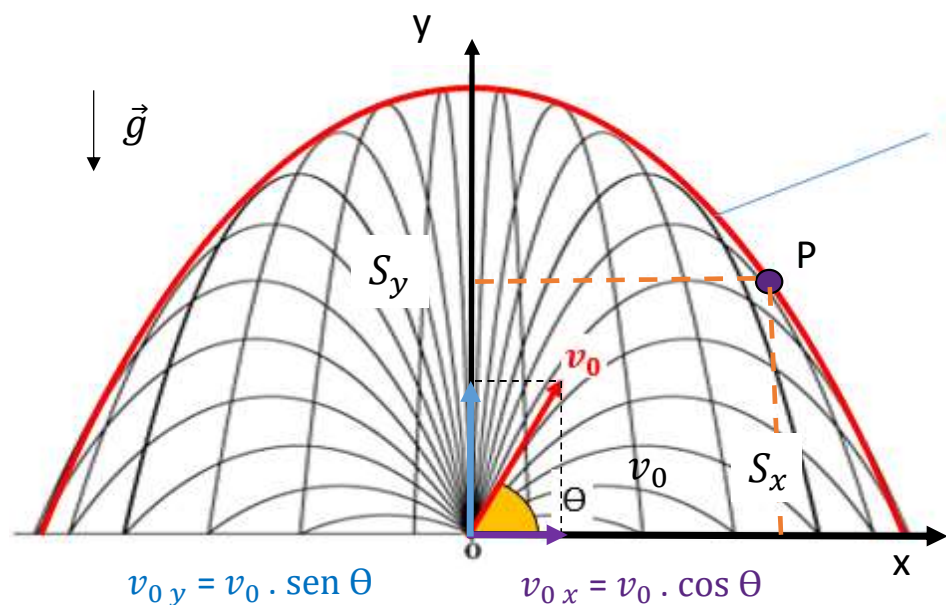


Parábola de segurança



<https://www.geogebra.org/m/zpkgc4uy>

Parábola de segurança



Parábola de segurança

Direção x (MU)

$$v_{0x \text{ cte}} = v_0 \cdot \cos \theta$$

$$S_x = S_{0x} + v_{0x} \cdot t$$

$$S_x = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t$$

$$t = \frac{S_x}{v_0 \cdot \cos \theta}$$

Direção y (MUV)

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$$

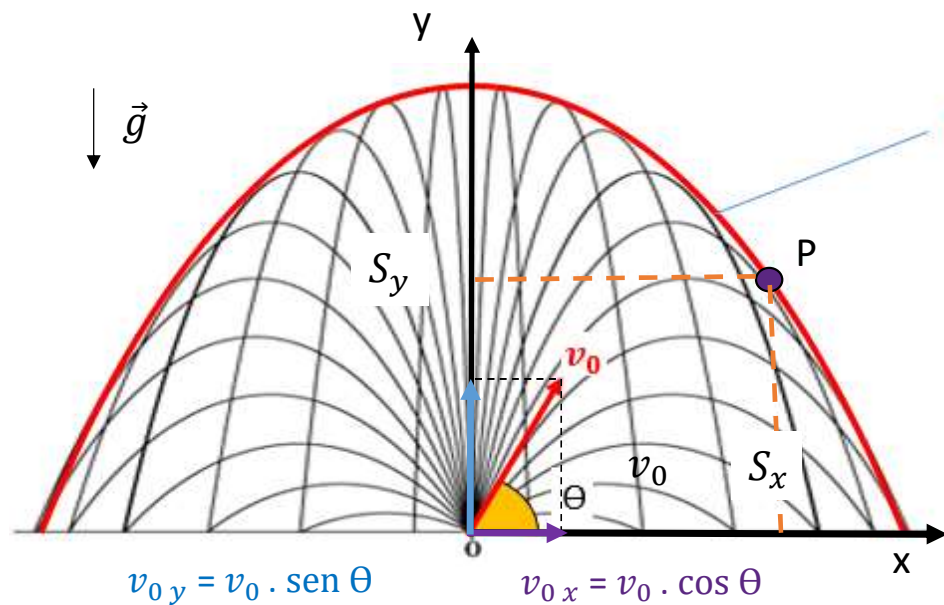
$$S_y = S_{0y} + v_{0y} \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$S_y = v_0 \cdot \sin \theta \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$S_y = v_0 \cdot \sin \theta \cdot \frac{S_x}{v_0 \cdot \cos \theta} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{S_x}{v_0 \cdot \cos \theta} \right)^2$$

$$S_y = S_x \cdot \operatorname{tg} \theta - \frac{g \cdot S_x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}$$

Parábola de segurança



Parábola de segurança

$$S_y = S_x \cdot \operatorname{tg} \theta - \frac{g \cdot S_x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$$

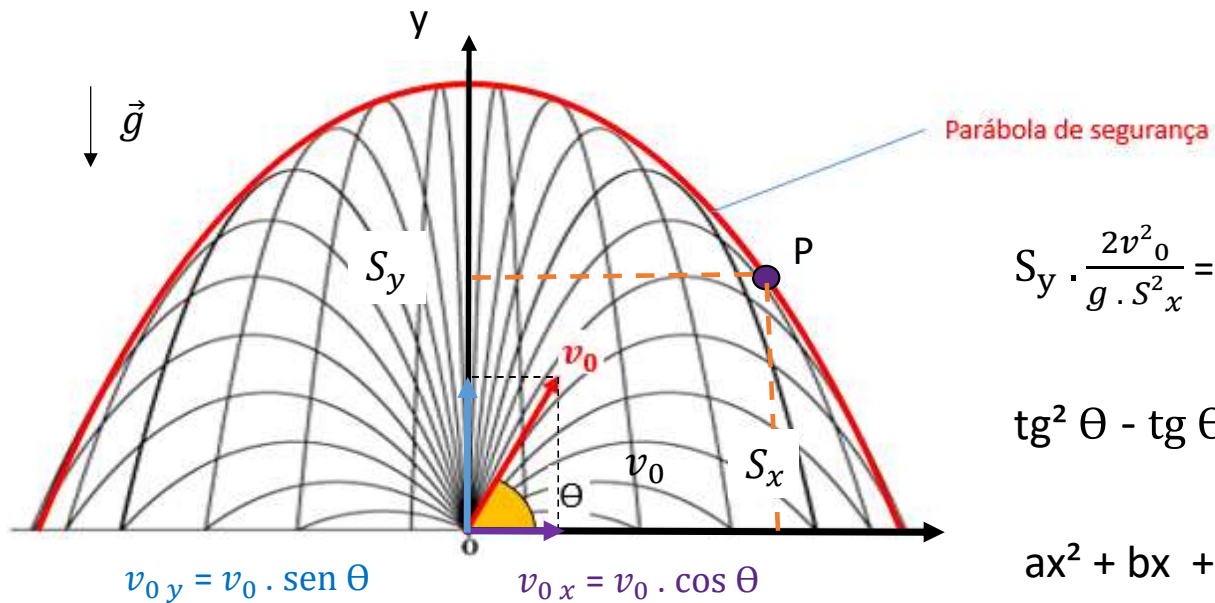
$$S_y = S_x \cdot \operatorname{tg} \theta - \frac{g \cdot S_x^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}{2v_0^2}$$

$$S_y = S_x \cdot \operatorname{tg} \theta - \frac{g \cdot S_x^2}{2v_0^2} - \frac{g \cdot S_x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}{2v_0^2}$$

$\times (2v_0^2)$
 $\times (g \cdot S_x^2)$

$$S_y \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x^2} = \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x} - 1 - \operatorname{tg}^2 \theta$$

Parábola de segurança



$$S_y \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x^2} = \tan \theta \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x} - 1 - \tan^2 \theta$$

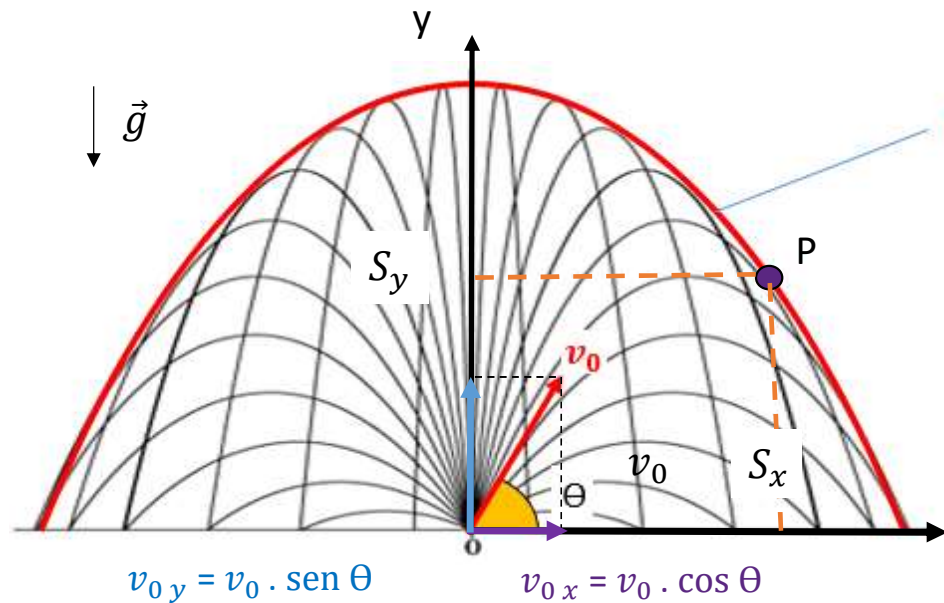
$$\tan^2 \theta - \tan \theta \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x} + S_y \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x^2} + 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$$

$$\left(-\frac{2v_0^2}{g \cdot S_x}\right)^2 - 4(1)\left(S_y \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x^2} + 1\right) = 0$$

Parábola de segurança



$$\left(\frac{2v_0^2}{g \cdot S_x}\right)^2 - 4(1)\left(S_y \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x^2} + 1\right) = 0$$

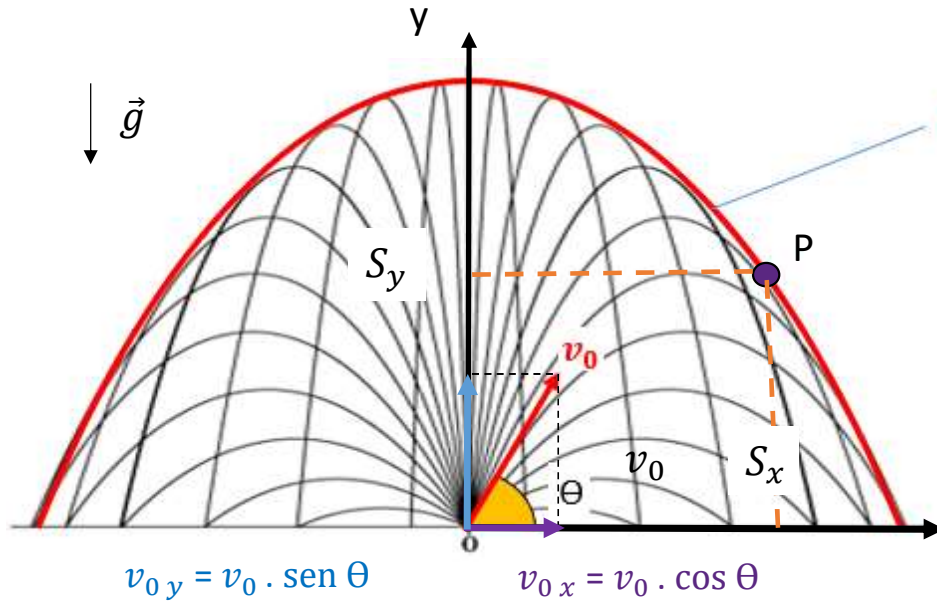
$$\frac{4v_0^4}{g^2 \cdot S_x^2} - 4S_y \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x^2} - 4 = 0 \quad \times \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{v_0^4}{g^2 \cdot S_x^2} - S_y \cdot \frac{2v_0^2}{g \cdot S_x^2} - 1 = 0$$

$$\frac{v_0^2}{g \cdot S_x} \cdot \left(\frac{v_0^2}{g \cdot S_x} - S_y \cdot \frac{2}{S_x} - \frac{g \cdot S_x}{v_0^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{v_0^2}{g \cdot S_x} - S_y \cdot \frac{2}{S_x} - \frac{g \cdot S_x}{v_0^2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{v_0^2}{g \cdot S_x} = 0$$

Parábola de segurança



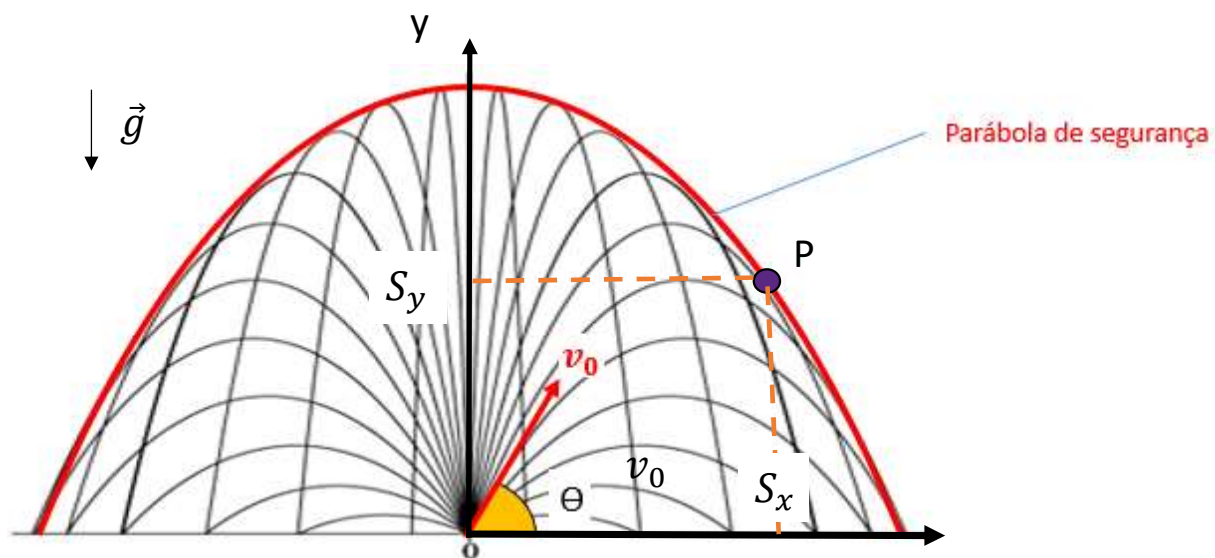
$$\frac{v_0^2}{g \cdot S_x} - S_y \cdot \frac{2}{S_x} - \frac{g \cdot S_x}{v_0^2} = 0$$

$$\frac{v_0^2}{g \cdot S_x} - \frac{g \cdot S_x}{v_0^2} = S_y \cdot \frac{2}{S_x}$$

$$S_y \cdot \frac{2}{S_x} = \frac{v_0^2}{g \cdot S_x} - \frac{g \cdot S_x}{v_0^2}$$

$$S_y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot S_x^2}{2v_0^2}$$

Parábola de segurança



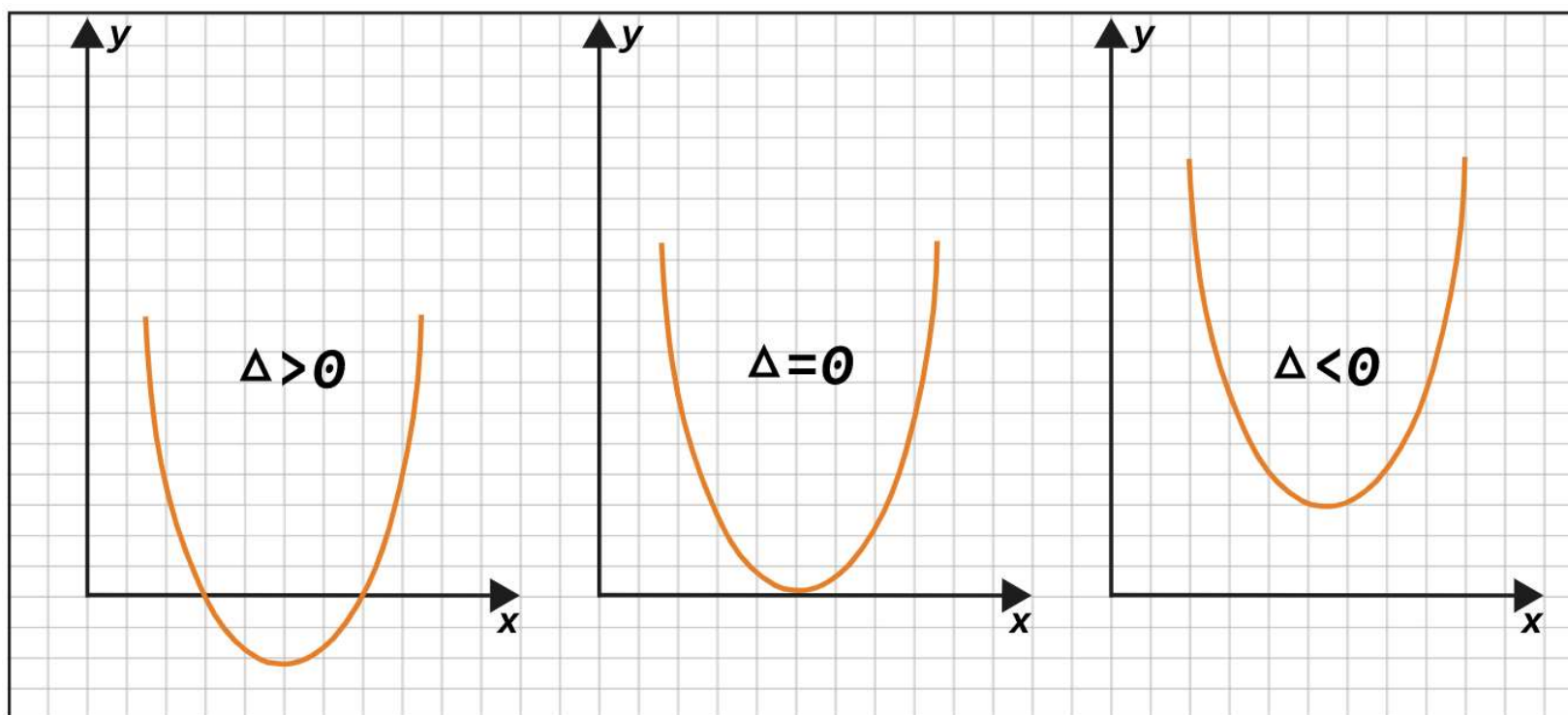
$$S_y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot S_x^2}{2v_0^2}$$

$v_0 \rightarrow \text{cte}$

$\theta \rightarrow \text{variável}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

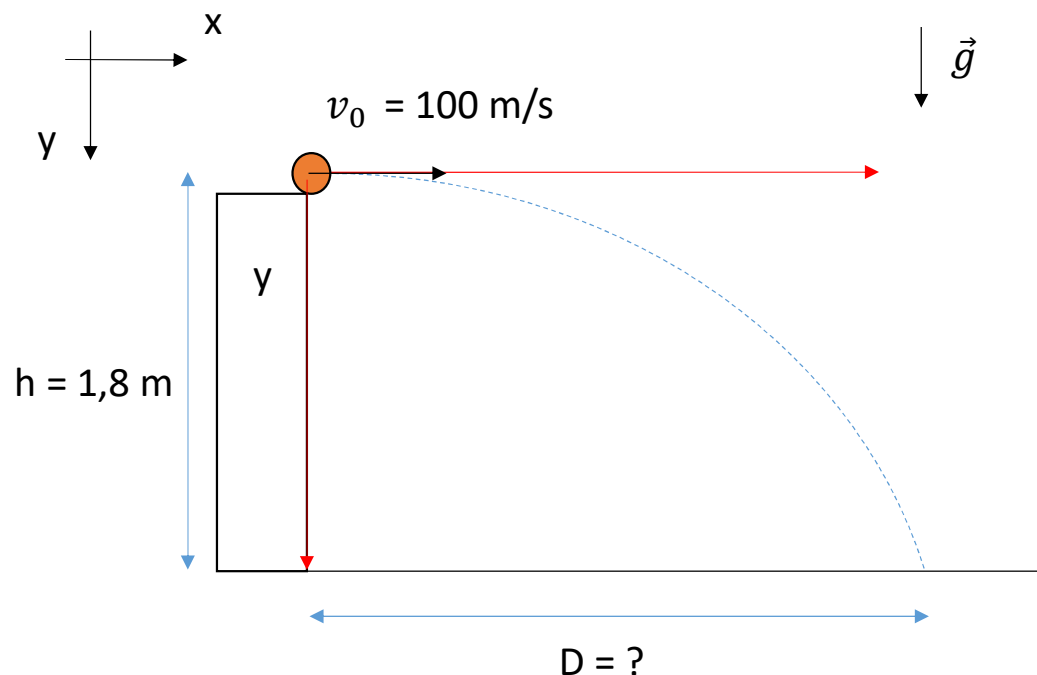
$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 0$$



Parábola de segurança

Exercícios

1. (OBF 1ª Fase – adaptada) Um projétil sai da arma com uma velocidade de 100m/s. Considerando que ele é atirado horizontalmente de uma altura de 1,8m, a que distância a bala atinge o chão? Quanto tempo a bala leva para fazer este percurso? Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Direção x (MU)

$$v_{x \text{ cte}} = 100 \text{ m/s}$$

$$v_x = \frac{\Delta S_x}{\Delta t}$$

$$\Delta S_x = v_x \cdot \Delta t$$

$$\Delta S_x = 100 \cdot 0,6$$

$$\Delta S_x = 60 \text{ m}$$

$$D = 60 \text{ m}$$

Direção y (MUV)

$$v_{0y} = 0$$

$$a_y = 10 \text{ m/s}^2$$

$$S_y = S_{0y} + v_{0y} \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2$$

$$1,8 = 0 + 0 + 5 \cdot \Delta t^2$$

$$\frac{1,8}{5} = 0,36 = \Delta t^2$$

$$0,6 \text{ s} = \Delta t$$

$$\Delta t_{\text{percurso}} = 0,6 \text{ s}$$

2. (OBF 2017 – 1ª Fase) Procurando atingir a outra margem de um rio, o garoto representado na figura chuta uma bola de massa (m), com uma velocidade de valor (v_0), atingindo o ponto A da figura, situado a 40 m da base. Desprezando-se as resistências viscosas e considerando-se que ele se encontra a uma altura de 20 m em relação ao ponto desejado, determine, módulo dessa velocidade. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\sin 60^\circ = 0,8$.

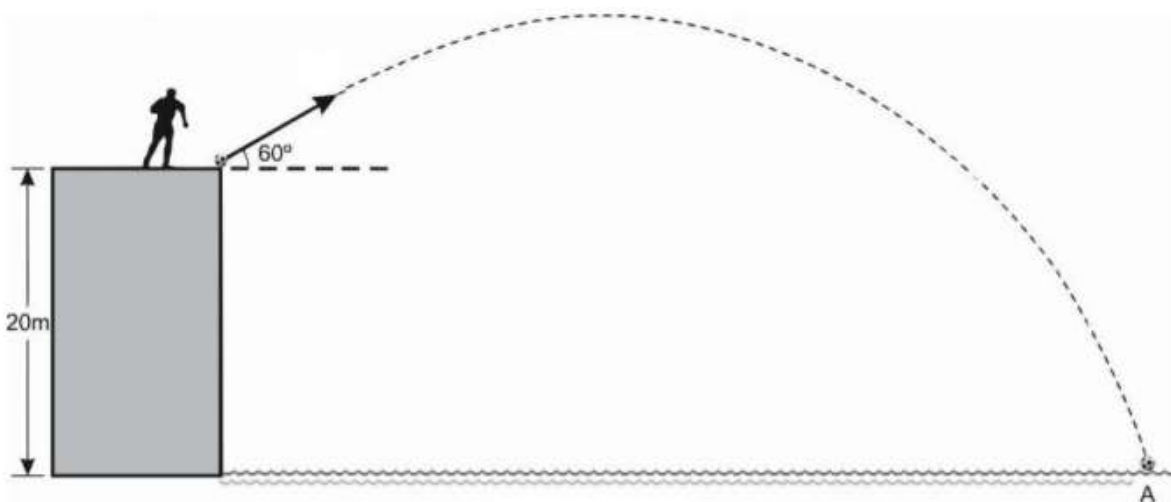
a) 19,5 m/s

b) 15,5 m/s

c) 22,5 m/s

d) 30,0 m/s

e) 45,0 m/s



2. (OBF 2017 – 1ª Fase) Procurando atingir a outra margem de um rio, o garoto representado na figura chuta uma bola de massa (m), com uma velocidade de valor (v_0), atingindo o ponto A da figura, situado a 40 m da base. Desprezando-se as resistências viscosas e considerando-se que ele se encontra a uma altura de 20 m em relação ao ponto desejado, determine, módulo dessa velocidade. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\sin 60^\circ = 0,8$.

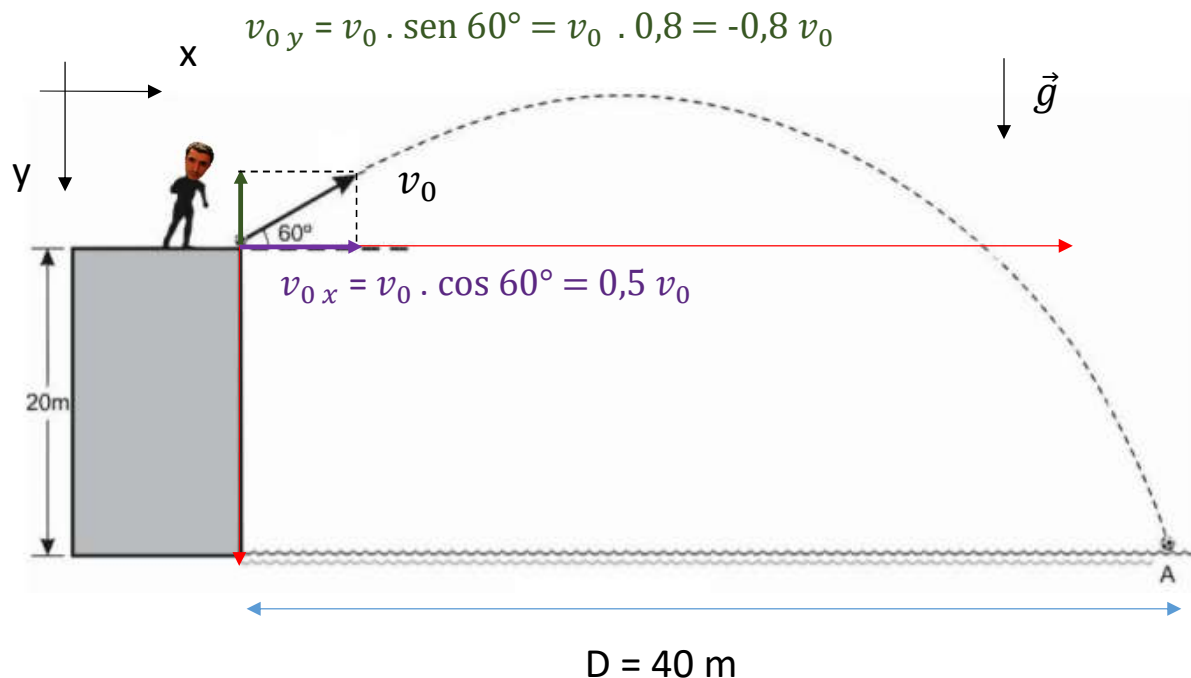
a) 19,5 m/s

b) 15,5 m/s

c) 22,5 m/s

d) 30,0 m/s

e) 45,0 m/s



Direção x (MU)

$$v_{x \text{ cte}} = 0,5 \cdot v_0$$

$$v_x = \frac{\Delta S_x}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta S_x}{v_x}$$

$$\Delta t = \frac{40}{0,5 \cdot v_0}$$

$$\Delta t = \frac{80}{v_0} \text{ s}$$

Direção y (MUV)

$$v_{0y} = -0,8v_0$$

$$a_y = 10 \text{ m/s}^2$$

2. (OBF 2017 – 1ª Fase) Procurando atingir a outra margem de um rio, o garoto representado na figura chuta uma bola de massa (m), com uma velocidade de valor (v_0), atingindo o ponto A da figura, situado a 40 m da base. Desprezando-se as resistências viscosas e considerando-se que ele se encontra a uma altura de 20 m em relação ao ponto desejado, determine, módulo dessa velocidade. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\sin 60^\circ = 0,8$.

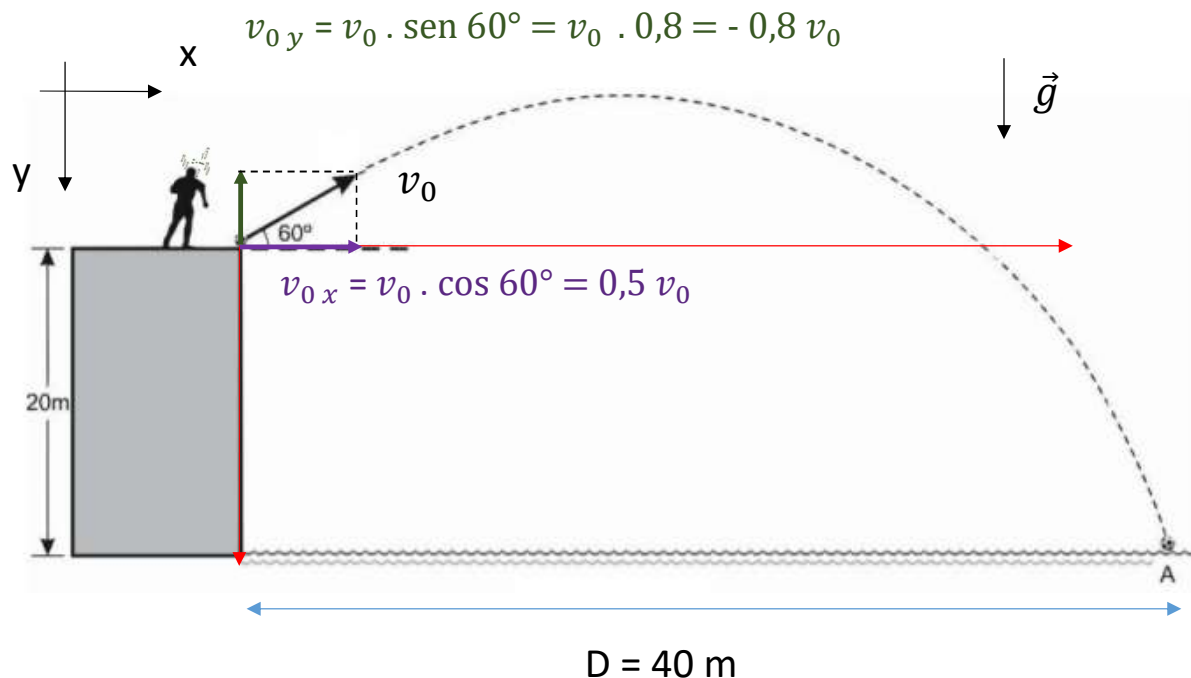
a) 19,5 m/s

b) 15,5 m/s

c) 22,5 m/s

d) 30,0 m/s

e) 45,0 m/s



Direção y (MUV)

$$v_{0y} = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_0 \quad \Delta t = \frac{80}{v_0} \text{ s}$$

$$a_y = 10 \text{ m/s}^2$$

$$S_y = S_{0y} + v_{0y} \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2$$

$$20 = 0 - 0,8 v_0 \cdot \frac{80}{v_0} + 5 \cdot \left(\frac{80}{v_0}\right)^2$$

$$20 = -64 + \frac{32000}{v_0^2}$$

2. (OBF 2017 – 1ª Fase) Procurando atingir a outra margem de um rio, o garoto representado na figura chuta uma bola de massa (m), com uma velocidade de valor (v_0), atingindo o ponto A da figura, situado a 40 m da base. Desprezando-se as resistências viscosas e considerando-se que ele se encontra a uma altura de 20 m em relação ao ponto desejado, determine, módulo dessa velocidade. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\sin 60^\circ = 0,8$.

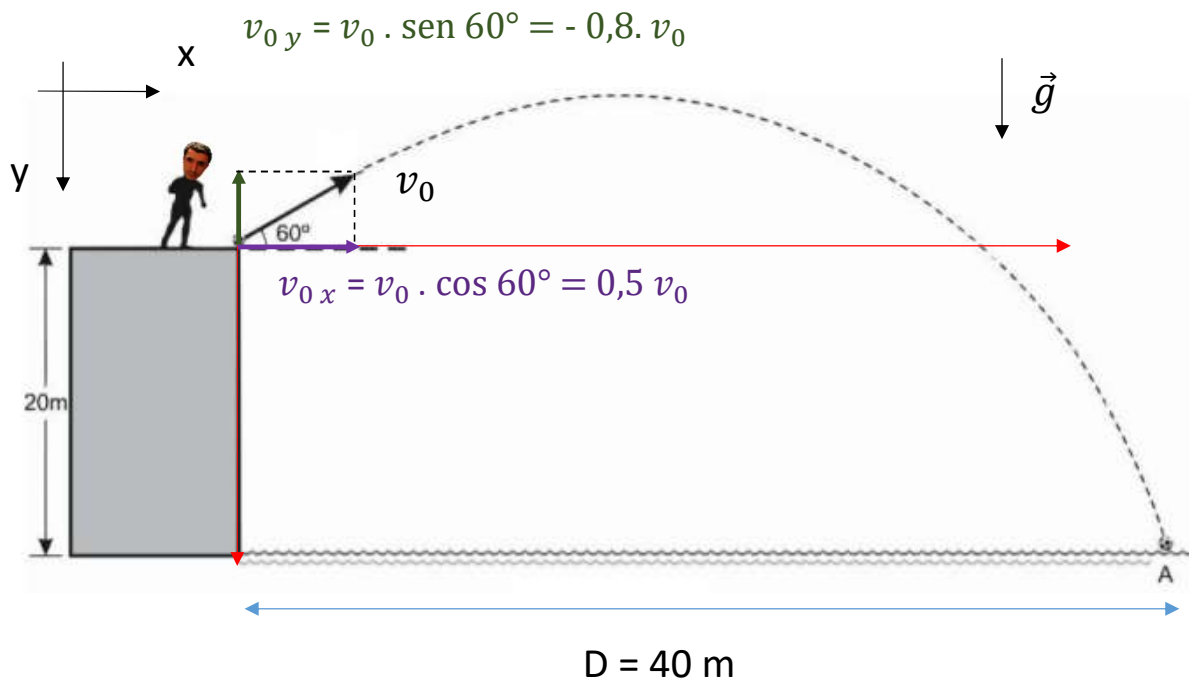
a) 19,5 m/s

b) 15,5 m/s

c) 22,5 m/s

d) 30,0 m/s

e) 45,0 m/s



Direção y (MUV)

$$v_{0y} = -0,8 v_0 \quad \Delta t = \frac{80}{v_0} \text{ s}$$

$$a_y = 10 \text{ m/s}^2$$

$$20 = -64 + \frac{32000}{v_0^2}$$

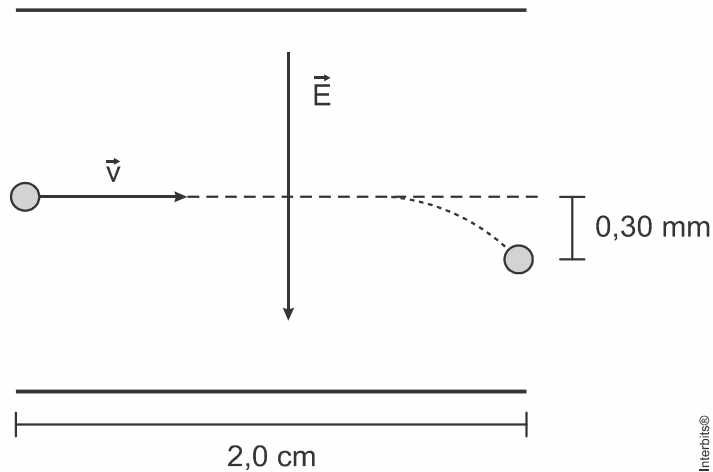
$$84 = \frac{32000}{v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{32000}{84}$$

$$v_0^2 \cong 380,95$$

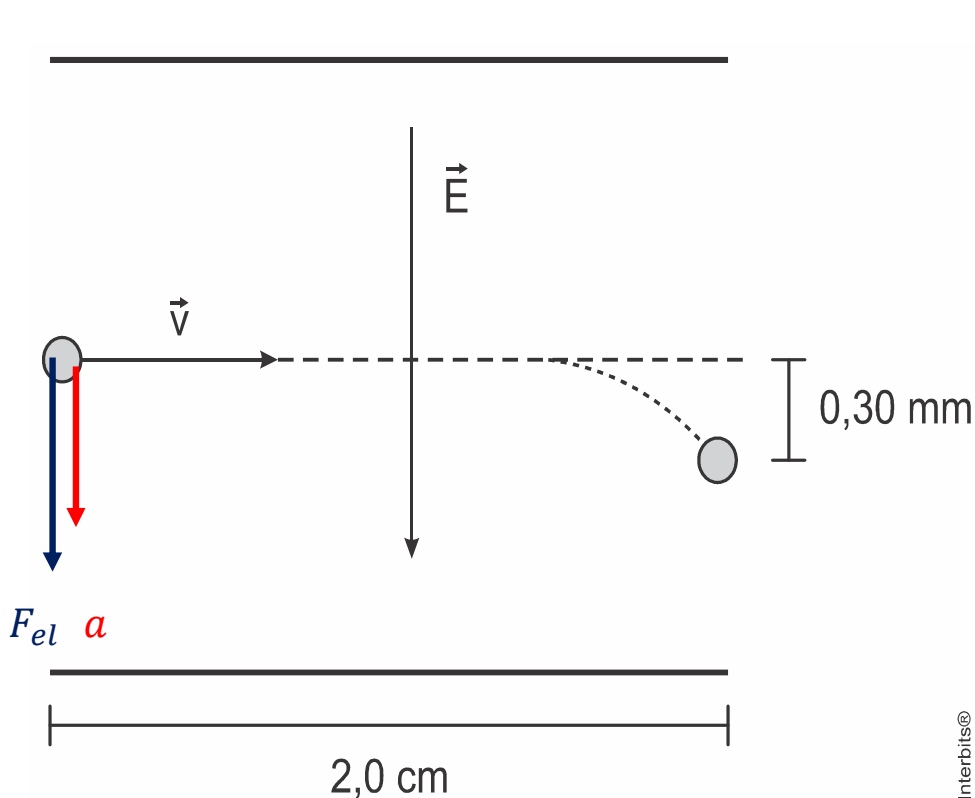
$$v_0 \cong 19,5 \text{ m/s}$$

3. (ITA) Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho são ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q e, a seguir, se deslocam no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio igual a $10\ \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20\ \text{m/s}$ entre placas de comprimento igual a $2\ \text{cm}$ no interior das quais existe um campo elétrico vertical uniforme, cujo módulo é $8 \cdot 10^4\ \text{N/C}$ (veja figura). Considerando que a densidade da gota seja de $1000\ \text{kg/m}^3$ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,3\ \text{mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo da sua carga elétrica é de

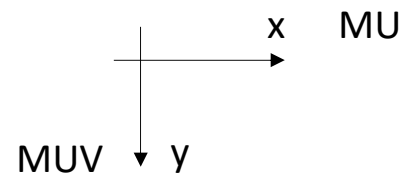


- a) $2,0 \cdot 10^{-14}\text{C}$
- b) $3,1 \cdot 10^{-14}\text{C}$
- c) $6,3 \cdot 10^{-1}\text{C}$
- d) $3,1 \cdot 10^{-1}\text{C}$
- e) $1,1 \cdot 10^{-10}\text{C}$

3. (ITA) Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho são ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q e, a seguir, se deslocam no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio igual a $10\ \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20\ \text{m/s}$ entre placas de comprimento igual a $2\ \text{cm}$ no interior das quais existe um campo elétrico vertical uniforme, cujo módulo é $8 \cdot 10^4\ \text{N/C}$ (veja figura). Considerando que a densidade da gota seja de $1000\ \text{kg/m}^3$ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,3\ \text{mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo da sua carga elétrica é de



$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$



Eixo x (MU)

$$v_x (cte) = 20\ \text{m/s}$$

$$\Delta S_x = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

$$\Delta t_x = ?$$

$$\Delta t_x = \frac{\Delta S_x}{v_x}$$

$$\Delta t_x = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{20}$$

$$\Delta t_x = 10^{-3}\ \text{s}$$

Eixo y (MUV)

$$R_y = m \cdot a_y$$

$$F_{el} = m \cdot a_y$$

$$E \cdot q = m \cdot a_y$$

$$a_y = \frac{E \cdot q}{m}$$

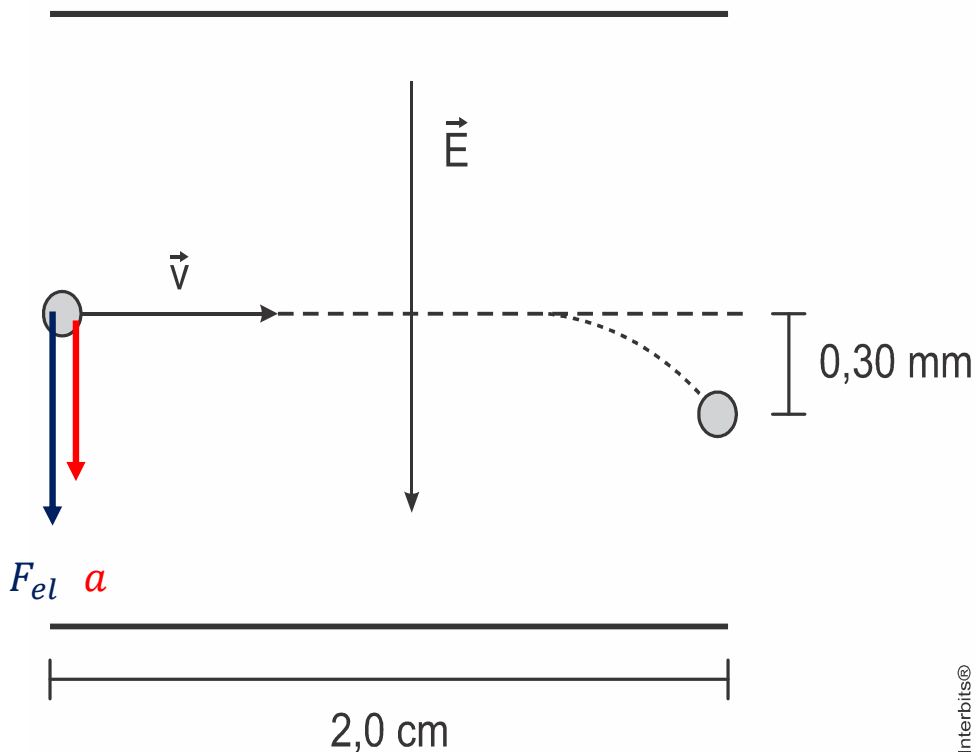
$$v_{0y} = 0$$

$$\Delta S_y = 0,3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\Delta t_y = \Delta t_x$$

$$\Delta t_y = 10^{-3}\ \text{s}$$

3. (ITA) Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho são ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q e, a seguir, se deslocam no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio igual a $10\ \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20\ \text{m/s}$ entre placas de comprimento igual a $2\ \text{cm}$ no interior das quais existe um campo elétrico vertical uniforme, cujo módulo é $8 \cdot 10^4\ \text{N/C}$ (veja figura). Considerando que a densidade da gota seja de $1000\ \text{kg/m}^3$ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,3\ \text{mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo da sua carga elétrica é de



$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

Eixo y (MUV)

$$R_y = m \cdot a_y$$

$$F_{el} = m \cdot a_y$$

$$E \cdot q = m \cdot a_y$$

$$a_y = \frac{E \cdot q}{m}$$

$$v_{0y} = 0$$

$$\Delta S_y = 0,3 \cdot 10^{-3}\text{m}$$

$$\Delta t_y = \Delta t_x$$

$$\Delta t_y = 10^{-3}\text{s}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot (10 \cdot 10^{-6})^3$$

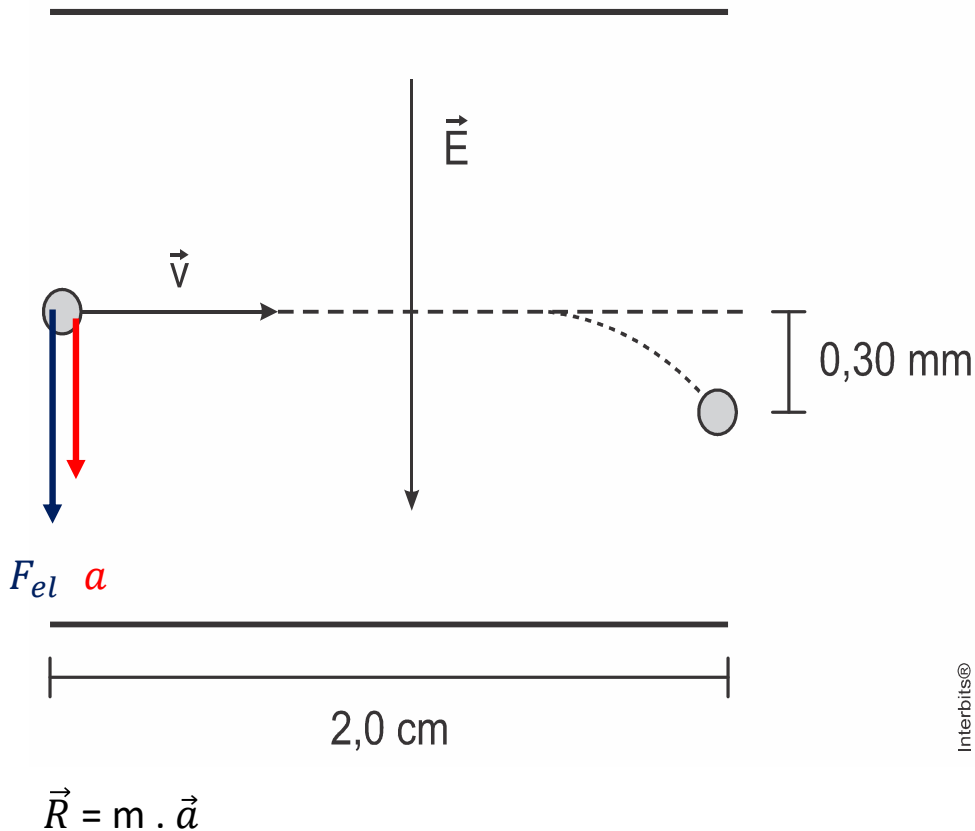
$$V = 4 \cdot 10^{-15}\text{m}^3$$

$$d = \frac{m}{V}$$

$$m = d \cdot V = 1000 \cdot 4 \cdot 10^{-15}$$

$$m = 4 \cdot 10^{-12}\text{kg}$$

3. (ITA) Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho são ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q e, a seguir, se deslocam no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio igual a $10\text{ }\mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20\text{ m/s}$ entre placas de comprimento igual a 2 cm no interior das quais existe um campo elétrico vertical uniforme, cujo módulo é $8 \cdot 10^4\text{ N/C}$ (veja figura). Considerando que a densidade da gota seja de 1000 kg/m^3 e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,3\text{ mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo da sua carga elétrica é de



Eixo y (MUV)

$$R_y = m \cdot a_y$$

$$F_{el} = m \cdot a_y$$

$$E \cdot q = m \cdot a_y$$

$$a_y = \frac{E \cdot q}{m}$$

$$v_{0y} = 0$$

$$\Delta S_y = 0,3 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$$\Delta t_y = \Delta t_x$$

$$\Delta t_y = 10^{-3}\text{ s}$$

$$m = 4 \cdot 10^{-12}\text{ kg}$$

$$S_y = S_{0y} + V_{0y} \cdot \Delta t_y + \frac{a_y}{2} \cdot \Delta t_y^2$$

$$\Delta S_y = \frac{a_y}{2} \cdot \Delta t_y^2$$

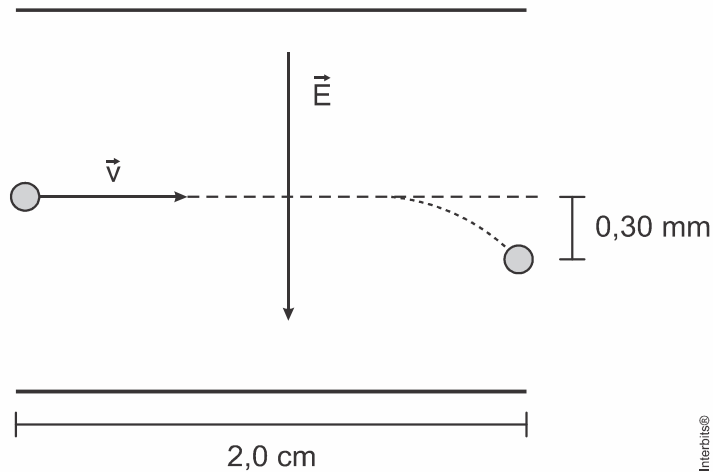
$$\Delta S_y = \frac{E \cdot q}{2m} \cdot \Delta t_y^2$$

$$q = \frac{2 \cdot \Delta S_y \cdot m}{E \cdot \Delta t_y^2}$$

$$q = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-12}}{8 \cdot 10^4 \cdot (10^{-3})^2}$$

$$q = 0,3 \cdot 10^{-13} = 3 \cdot 10^{-14}\text{ C}$$

3. (ITA) Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho são ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q e, a seguir, se deslocam no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio igual a $10\ \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20\ \text{m/s}$ entre placas de comprimento igual a $2\ \text{cm}$ no interior das quais existe um campo elétrico vertical uniforme, cujo módulo é $8 \cdot 10^4\ \text{N/C}$ (veja figura). Considerando que a densidade da gota seja de $1000\ \text{kg/m}^3$ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,3\ \text{mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo da sua carga elétrica é de

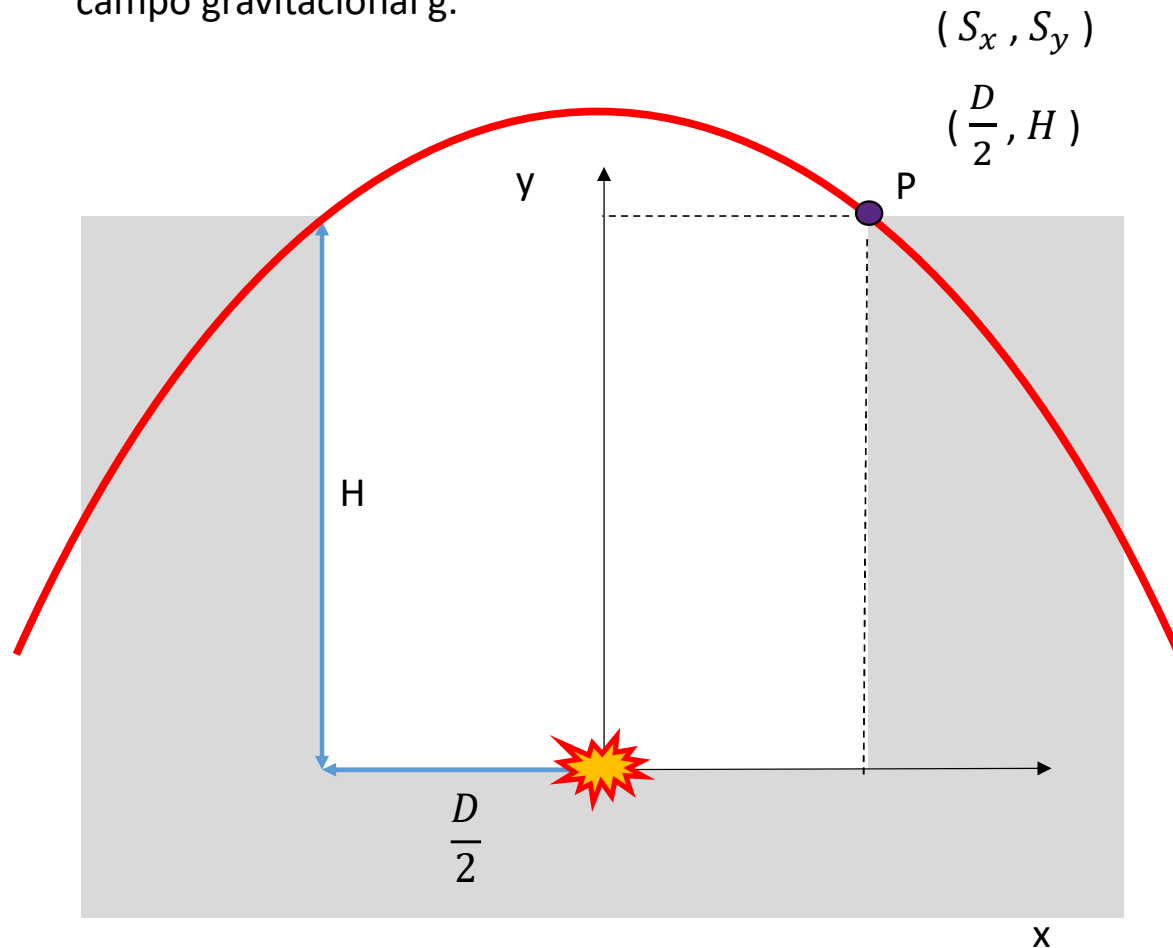


- a) $2,0 \cdot 10^{-14}\text{C}$
- b) $3,1 \cdot 10^{-11}\text{C}$
- c) $6,3 \cdot 10^{-14}\text{C}$
- d) $3,1 \cdot 10^{-11}\text{C}$
- e) $1,1 \cdot 10^{-10}\text{C}$



4. (SARAEVA - adaptada) - As provas do detonador de uma granada são realizadas no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H . Os estilhaços da granada, que se produzem depois da explosão e cujas velocidades não ultrapassam V_0 , não devem cair na superfície da terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo D do poço? Considere um campo gravitacional g .

4. (SARAEVA - adaptada) - As provas do detonador de uma granada são realizadas no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H . Os estilhaços da granada, que se produzem depois da explosão e cujas velocidades não ultrapassam V_0 , não devem cair na superfície da terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo D do poço? Considere um campo gravitacional g .



$$S_y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot S_x^2}{2v_0^2}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot (\frac{D}{2})^2}{2v_0^2}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot D^2}{8v_0^2}$$

$$\frac{g \cdot D^2}{8v_0^2} = \frac{v_0^2}{2g} - H$$

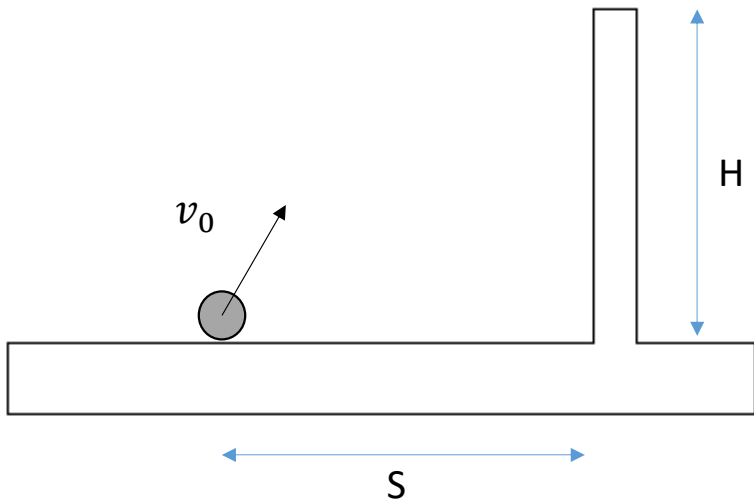
$$\frac{g \cdot D^2}{8v_0^2} = \frac{v_0^2 - 2gH}{2g}$$

$$\frac{g \cdot D^2}{4v_0^2} = \frac{v_0^2 - 2gH}{g}$$

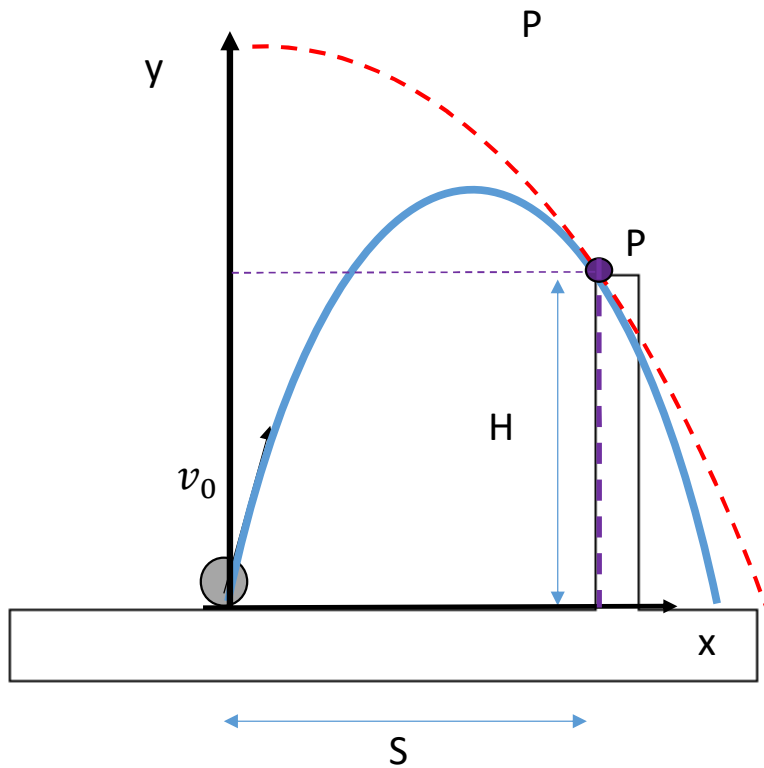
$$D^2 = \frac{4v_0^2(v_0^2 - 2gH)}{g^2}$$

$$D = \frac{2v_0}{g} \sqrt{(v_0^2 - 2gH)}$$

5. (SARAEVA - adaptada) - A figura mostra uma bola no solo, inicialmente em repouso, a uma distância $S = 6\text{m}$ de um muro de altura $H = 3,2\text{m}$. Determine a mínima velocidade V_0 com que se deve arremessá-la para que a fim de que a mesma caia do outro lado do muro. Adote $g = 10\text{ m/s}^2$



5. (SARAEVA - adaptada) - A figura mostra uma bola no solo, inicialmente em repouso, a uma distância $S = 6\text{m}$ de um muro de altura $H = 3,2\text{m}$. Determine a mínima velocidade V_0 com que se deve arremessá-la para que a fim de que a mesma caia do outro lado do muro. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$



$$(S_x, S_y)$$

$$(S, H)$$

$$(6, 3,2)$$

$$S_y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot S_x^2}{2v_0^2}$$

$$3,2 = \frac{v_0^2}{20} - \frac{10 \cdot 6^2}{2v_0^2}$$

$$3,2 = \frac{v_0^2}{20} - \frac{180}{v_0^2} \quad \times 20 v_0^2$$

$$64 \cdot v_0^2 = v_0^4 - 3600$$

$$v_0^4 - 64 \cdot v_0^2 - 3600 = 0$$

$$z^2 = v_0^2$$

$$z^2 - 64z - 3600 = 0$$

$$z = v_0^2 = 100 \text{ ou } z = v_0^2 = -36$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$