# Dinâmica dos corpos celestes: órbita circular

Setor A: Aulas 30 e 31 / Pg. 535 / Alfa 4

- SL 02 – Teoria / Revisão
- SL 14 – Exercícios

Apresentação e demais documentos: **fisicasp.com.br**

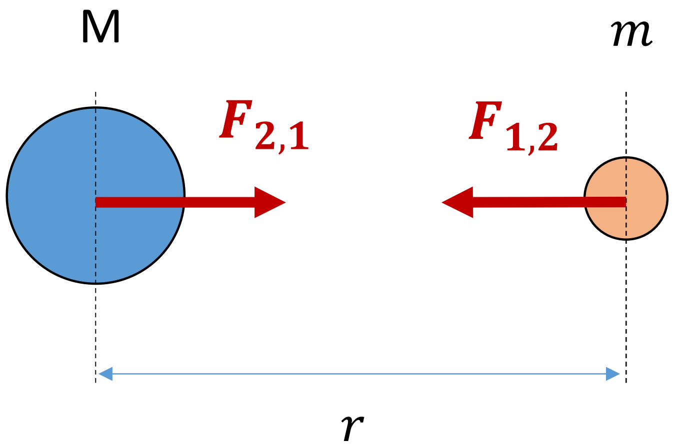
CORPORAÇÃO J.C.K
NÓS TEMOS AS FÓRMULAS PARA O SUCESSO

**Professor Caio – Física / Setor A**

# Lei de Newton da Gravitação Universal

## Força gravitacional

Matéria atrai matéria na razão direta do produto das massas e na razão inversa do quadrado da distância.

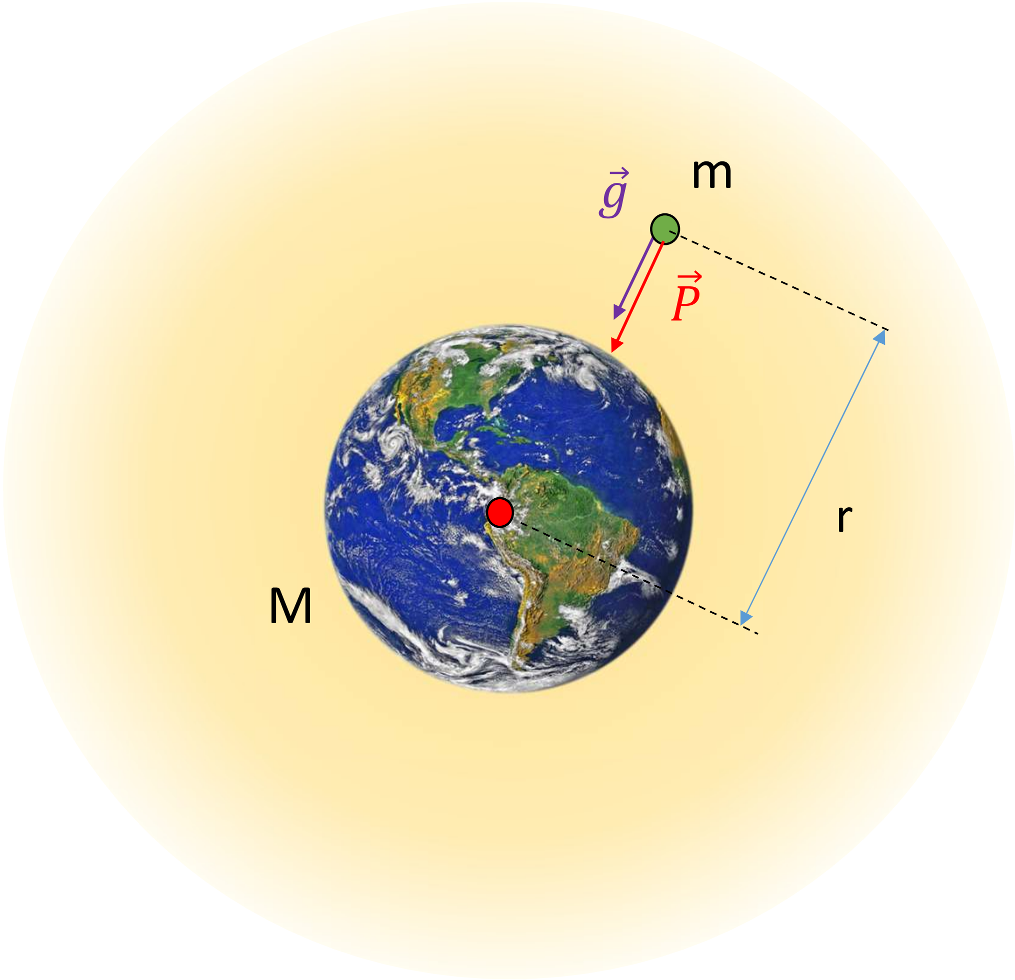



$$F_{1,2} = F_{2,1}$$

$$F_g = G \cdot \frac{M.m}{r^2}$$

- F : Força de atração – SI: N
- M e m: massas dos corpos: - SI: kg
- r ou d: distância entre os centros de massa dos corpos.
- G: constante da gravitação universal. SI: $6{,}67.10^{-11}$ N.m²/kg².

## Campo gravitacional, peso e força gravitacional




$$P = m.\,g \qquad F_g = G\,.\,\frac{Mm}{r^2}$$

$$P = F_g$$

$$\cancel{m}.g = G\,.\,\frac{M\cancel{m}}{r^2}$$

$$\boxed{g = \frac{GM}{r^2}}$$

KEEP CALM AND STUDY PHYSICS

## Dinâmica do movimento circular uniforme (MCU)

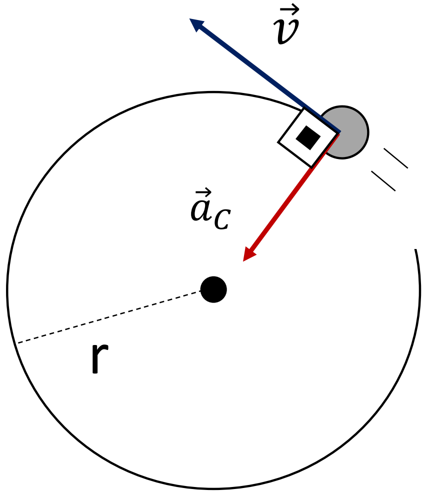
*Trajetória circular* — $|\vec{v}|$ *é constante*

$$v = \omega \;.\; r$$

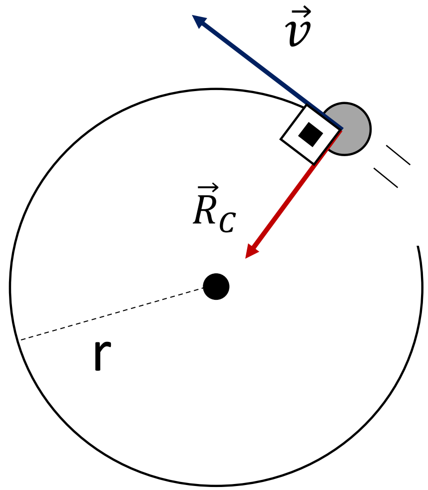
$\frac{m}{s}$ — $\frac{rad}{s}$ — m

$$\vec{\gamma} = \cancelto{0}{\vec{a}_t} + \vec{a}_c \;\Rightarrow\; \vec{\gamma} = \vec{a}_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \text{ou} \quad a_c = \omega^2 . r$$

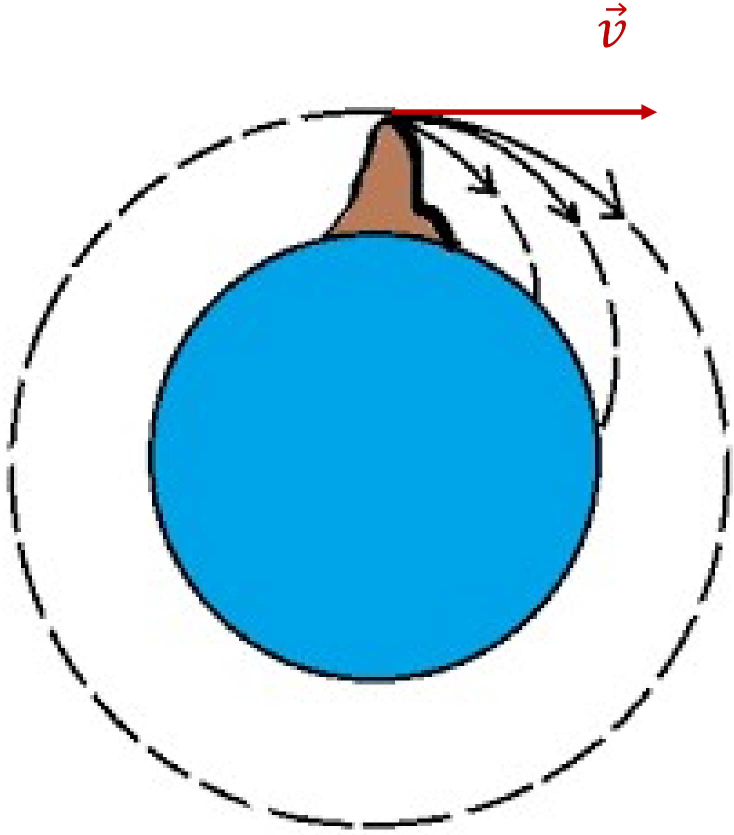



$$\vec{R} = m \,.\, \vec{\gamma} \;\Rightarrow\; \vec{R}_c = m \,.\, \vec{a}_c$$



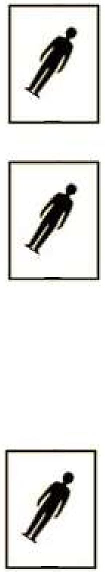
**Isaac Newton (1673 - 1627)**

**Órbita: queda livre infinita**

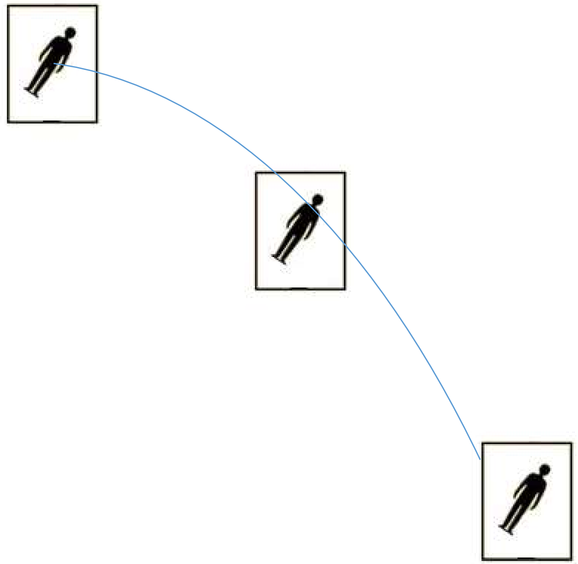



https://www.geogebra.org/m/gmg3ntrt

**Queda livre**

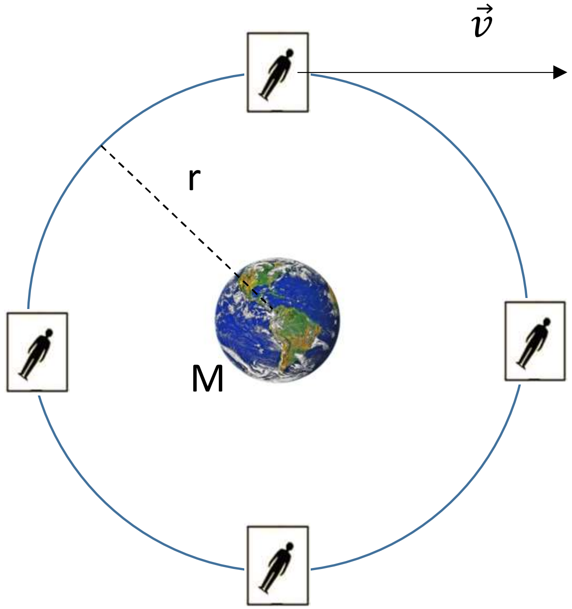


**Lançamento horizontal**



- **Imponderabilidade**: aparente ausência de peso em virtude da ausência de força normal.

- **Imponderabilidade**: aparente ausência de peso em virtude da ausência de força normal.



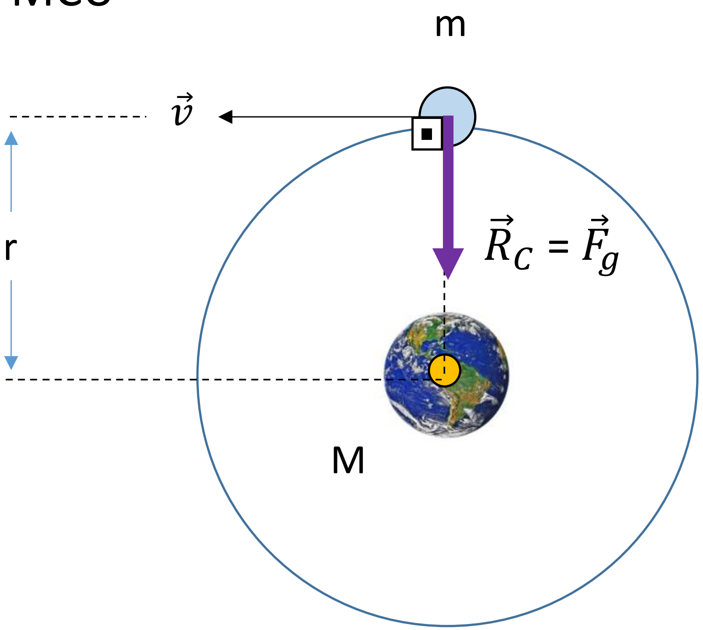

$$v^2 = \boxed{G.\frac{M}{r^2}}$$

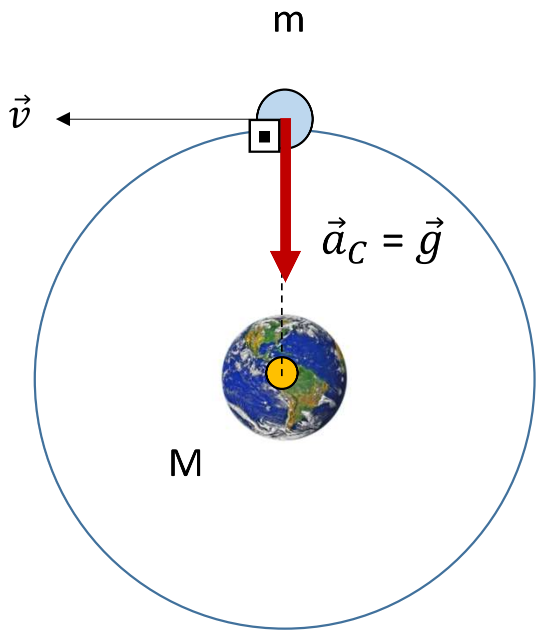
cte

Tripulante e estação apresentam mesma velocidade (v)

# Órbita circular

MCU




$$R_c = F_g$$

$$\cancel{m}.a_c = \cancel{m}.g$$

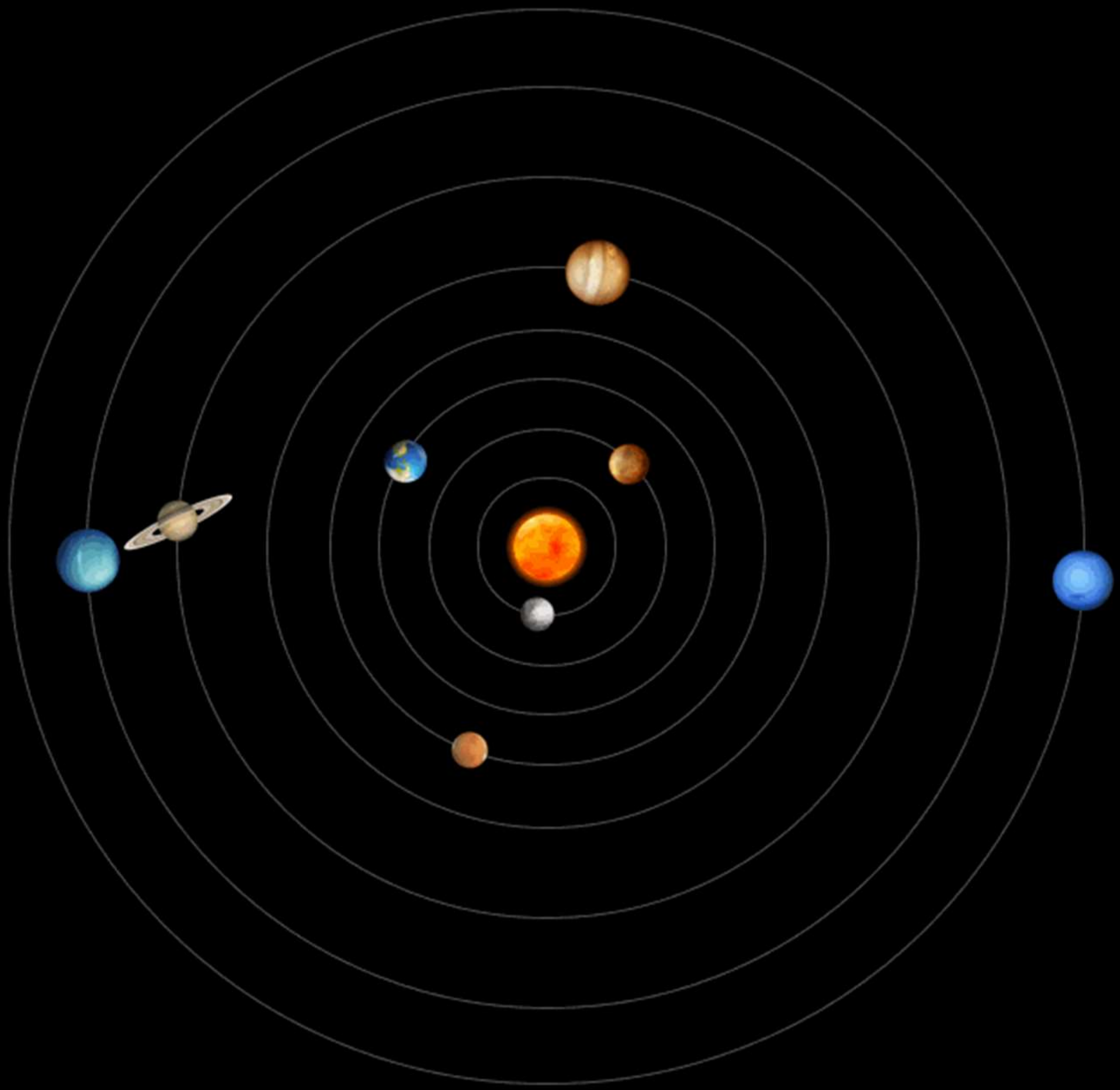
$$a_c = g$$

$$\frac{v^2}{r} = g \qquad\qquad \omega^2 . r = g$$

$$\frac{v^2}{\cancel{r}} = G.\frac{M}{r^{\cancel{2}}} \qquad\qquad \omega^2 . r = G.\frac{M}{r^2}$$

$$\boxed{v^2 = G.\frac{M}{r}} \qquad\qquad \boxed{\omega^2 . r^3 = G \,.\, M}$$

Não precisar decorar, mas precisa saber chegar!

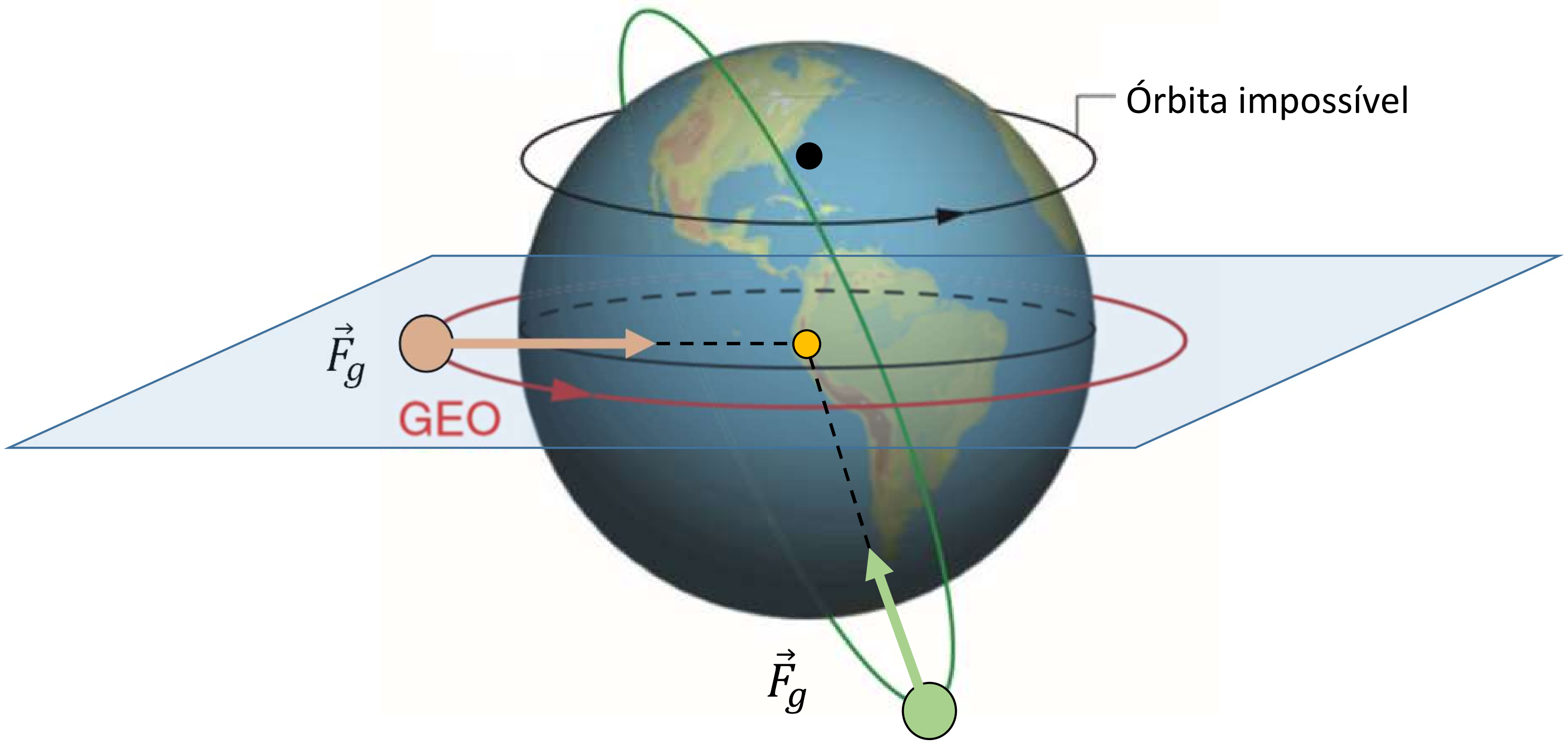


$$\downarrow v^2 = G.\frac{M_{Sol}}{r\uparrow}$$

Planetas mais distantes do Sol

menores velocidades escalares

# Satélites




**GEO - satélite geoestacionário**: período (T) igual ao período de rotação da Terra (T) e o plano de sua órbita coincide com o plano que contém a linha do equador (está sempre sobre o mesmo ponto da linha do equador).

KEEP CALM AND STUDY PHYSICS

## Satélite geoestacionário


- $T_{satélite} = T_{Terra}$ = 24h

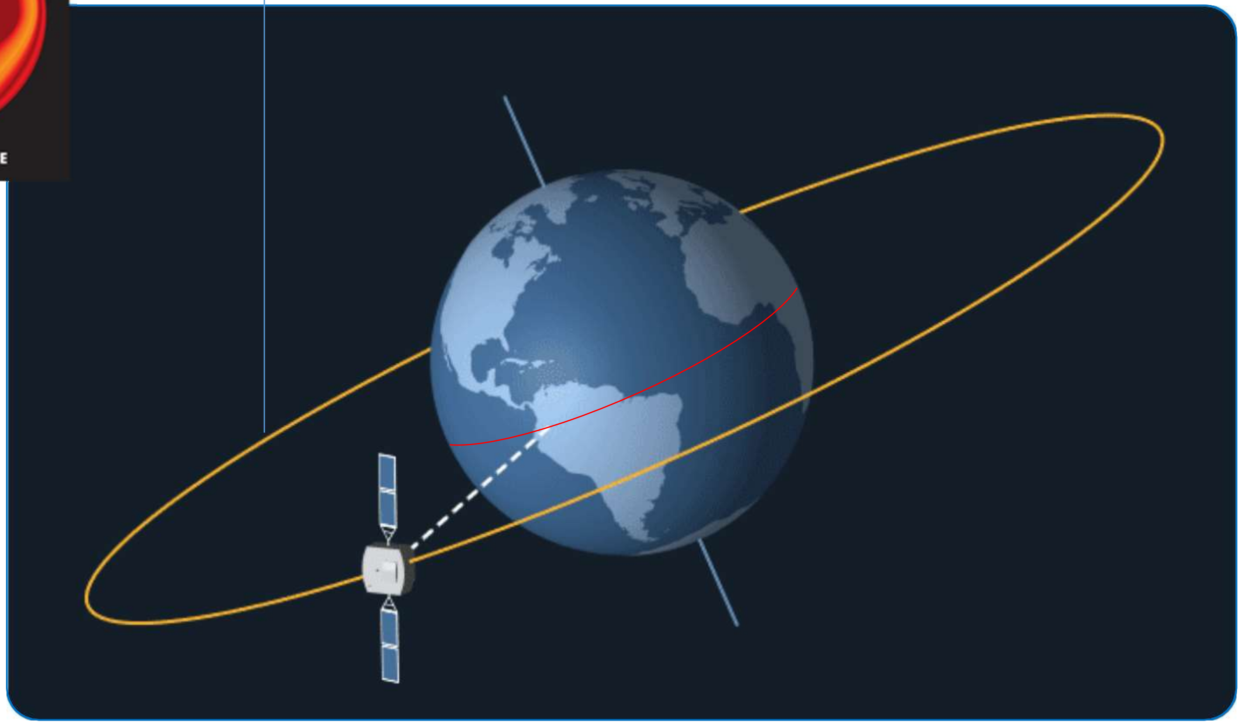
Velocidade angular (ω)

$\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T}$ SI: $\dfrac{rad}{s}$

- $\omega_{satélites} = \omega_{Terra}$

- $r \cong 42\,000$ km

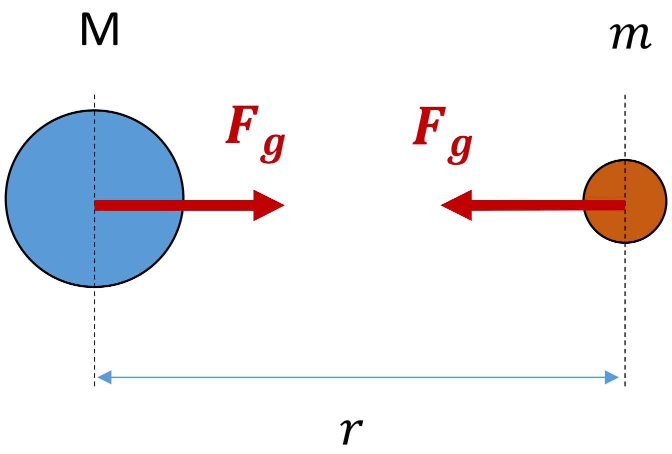
Anel de Clarke (todos os satélites geoestacionários estão neste anel



O plano de sua órbita coincide com o plano que contém a linha do equador (estão sempre sobre o mesmo ponto da linha do equador.

# Energia potencial gravitacional

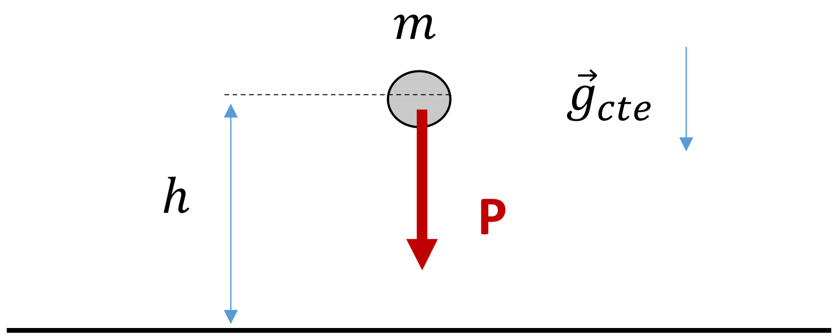
Para grandes distâncias




$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

r → ∞ $\quad E_p \rightarrow 0$

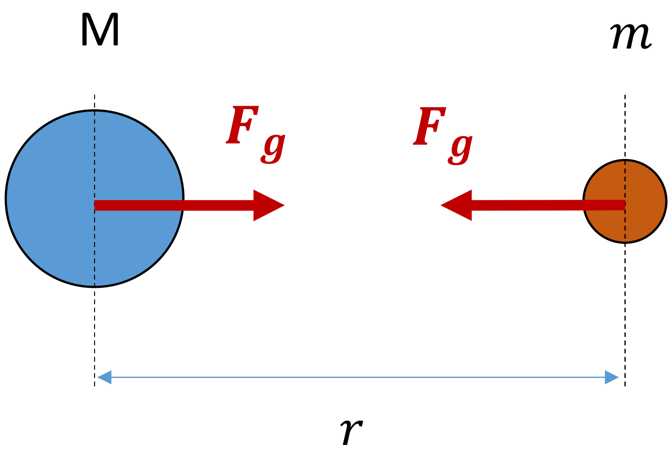
Para movimentos próximos à superfície de um astro




$$E_p = mgh$$

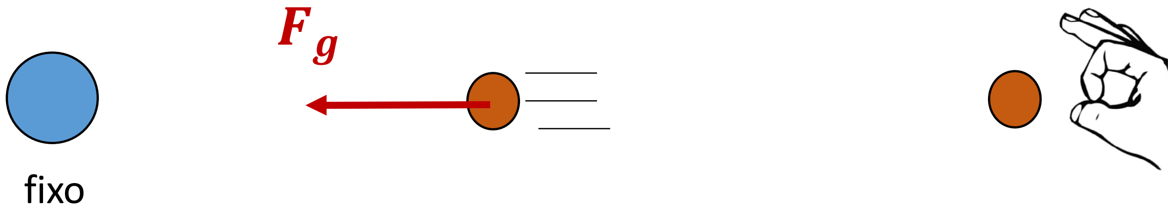
# Energia potencial gravitacional

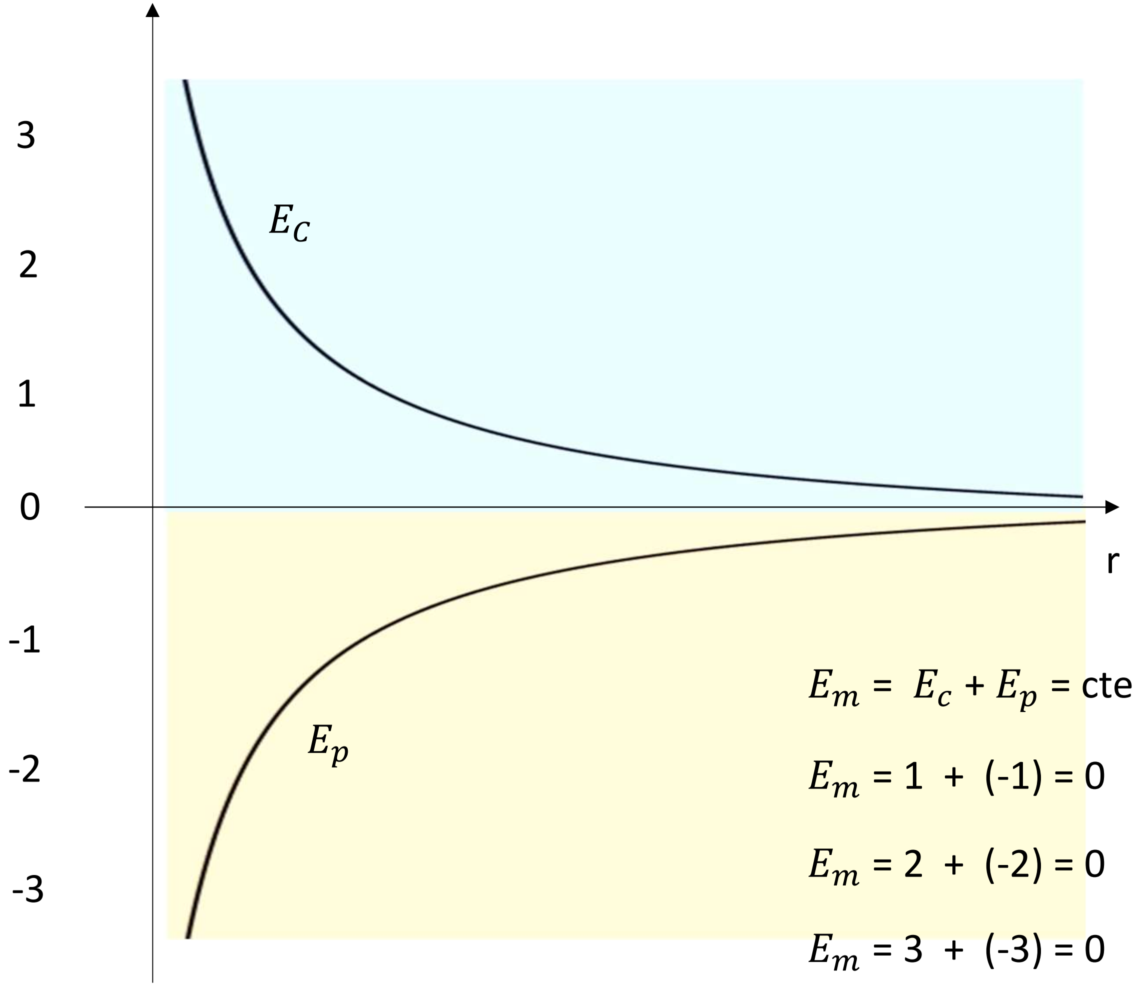
Para grandes distâncias




$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$r \to \infty \qquad E_p \to 0$



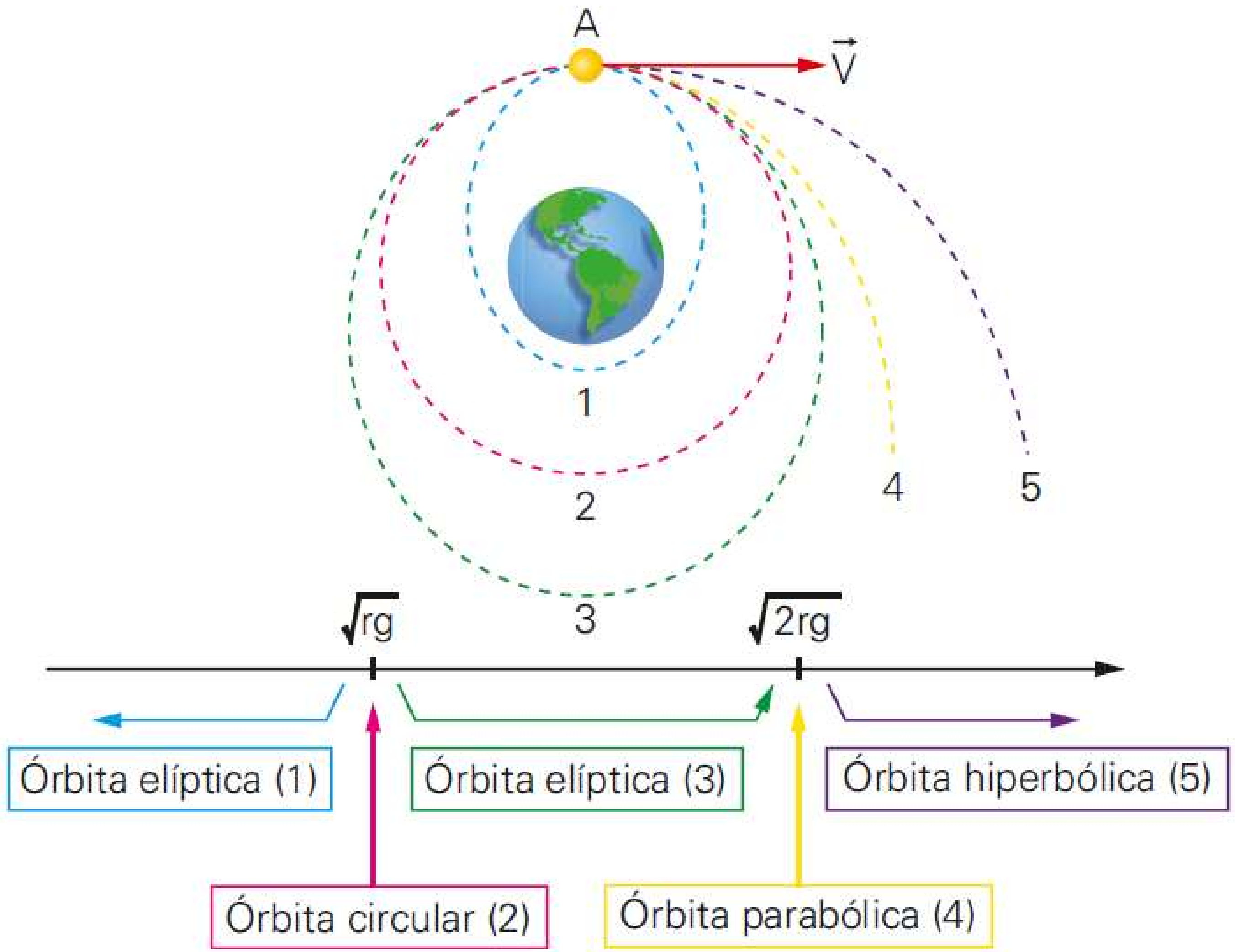

$E_m = E_c + E_p = \text{cte}$

$E_m = 1 + (-1) = 0$

$E_m = 2 + (-2) = 0$

$E_m = 3 + (-3) = 0$

# Órbitas


A
$\vec{V}$
1
2
3
4
5
$\sqrt{rg}$
$\sqrt{2rg}$
Órbita elíptica (1)
Órbita elíptica (3)
Órbita hiperbólica (5)
Órbita circular (2)
Órbita parabólica (4)

# Exercícios

1. (Unicamp-SP) Plutão é considerado um planeta anão, com massa $M_p$ = 1 . $10^{22}$ kg, bem menor que a massa da Terra. O módulo da força gravitacional entre duas massas $m_1$ e $m_2$ é dado por F = G . $\frac{m_1 . m_2}{r^2}$, em que r é a distância entre as massas e G é a constante gravitacional. Em situações que envolvem distâncias astronômicas, a unidade de comprimento comumente utilizada é a Unidade Astronômica (UA).

a) Considere que, durante a sua aproximação a Plutão, a sonda se encontra em uma posição que está $d_p$ = 0,15 UA distante do centro de Plutão e $d_T$ = 30 UA distante do centro da Terra. Calcule a razão ($\frac{F_T}{F_P}$) entre o módulo da força gravitacional com que a Terra atrai a sonda e o módulo da força gravitacional com que Plutão atrai a sonda. Caso necessário, use a massa da Terra $M_T$ = 6 . $10^{24}$ kg.

b) Suponha que a sonda New Horizons estabeleça uma órbita circular com velocidade escalar orbital constante em torno de Plutão com um raio de $r_p$ = $1.10^{-4}$UA. Obtenha o módulo da velocidade orbital nesse caso. Se necessário, use a constante gravitacional G = 6 . $10^{-11}$ N.m²/kg². Caso necessário, use 1 UA (Unidade astronômica) = 1,5 . $10^8$ km.

$M_p = 1 . 10^{22}$ kg

a) Considere que, durante a sua aproximação a Plutão, a sonda se encontra em uma posição que está $d_p = 0{,}15$ UA distante do centro de Plutão e $d_T = 30$ UA distante do centro da Terra. Calcule a razão $\left(\frac{F_T}{F_P}\right)$ entre o módulo da força gravitacional com que a Terra atrai a sonda e o módulo da força gravitacional com que Plutão atrai a sonda. Caso necessário, use a massa da Terra $M_T = 6 . 10^{24}$ kg.

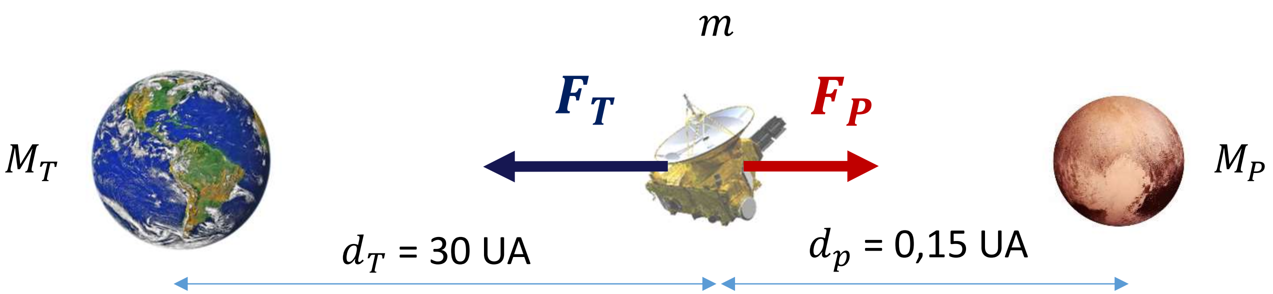
$$\frac{F_T}{F_P} = \frac{\cancel{G} . \frac{M_T . \cancel{m}}{{d_T}^2}}{\cancel{G} . \frac{M_P . \cancel{m}}{{d_p}^2}} = \frac{M_T}{{d_T}^2} . \frac{{d_p}^2}{M_p} = \frac{M_T}{M_p} . \frac{{d_p}^2}{{d_T}^2} = \frac{M_T}{M_p} . \left(\frac{d_p}{d_T}\right)^2 = \frac{6 . 10^{24}}{1 . 10^{22}} . \left(\frac{0{,}15}{30}\right)^2 = 6 . 10^{24} . 10^{-22} \left(\frac{1}{200}\right)^2$$

$$= 6 . 10^2 . \frac{1}{40000}$$

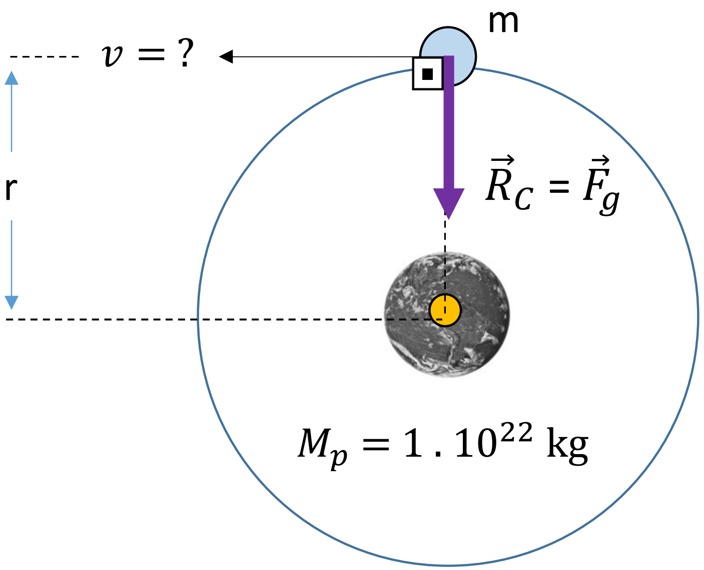
$$= 6 . 10^2 . \frac{1}{4.10^4}$$

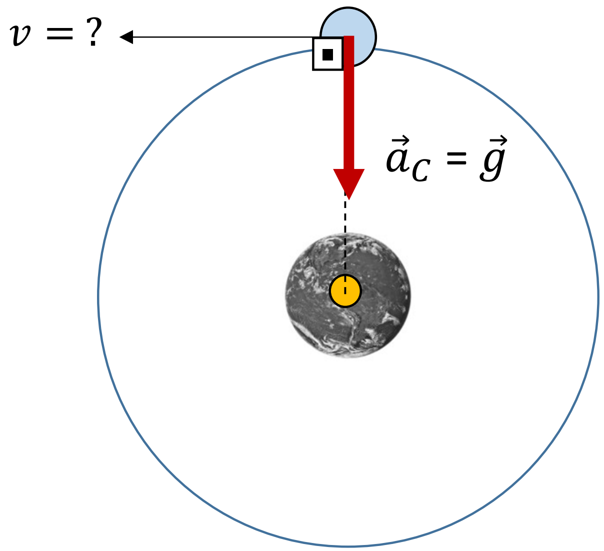
$$= 1{,}5 . 10^2 . 10^{-4}$$

$$\boxed{\frac{F_T}{F_P} = 1{,}5 . 10^{-2}}$$



b) Suponha que a sonda New Horizons estabeleça uma **órbita circular com velocidade escalar orbital constante** em torno de Plutão com um raio de $\boldsymbol{r_p}$ **= 1.10$^{-4}$UA**. Obtenha o módulo da velocidade orbital nesse caso. Se necessário, use a constante gravitacional **G = 6 . 10$^{-11}$ N.m²/kg²**. Caso necessário, **use 1 UA (Unidade astronômica) = 1,5 . 10$^{8}$ km**.




$R_c = F_g$

$\cancel{m}.a_c = \cancel{m}.g$

$a_c = g$

$\frac{v^2}{r} = g$

$\frac{v^2}{\cancel{r}} = G.\frac{M}{\cancel{r^2}}$

$v^2 = G.\frac{M}{r}$

$v = \sqrt{G.\frac{M}{r}}$

$v = \sqrt{6.\,10^{-11}.\frac{10^{22}}{1{,}5.10^{7}}}$

$v = \sqrt{4.\,10^{11}.\frac{1}{10^{7}}}$

$v = \sqrt{4.\,10^{11}.\;10^{-7}}$

$v = \sqrt{4.\,10^{4}}$

$\boxed{v = 2 . 10^2 \text{ m/s}}$

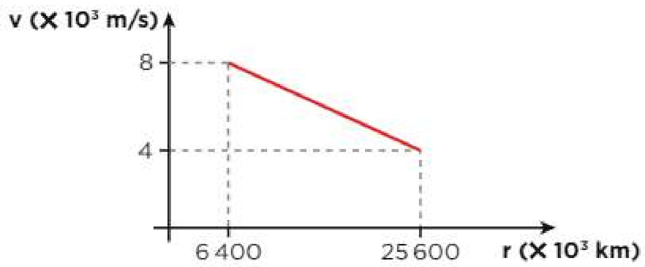
$r_p = 1.10^{-4}$UA

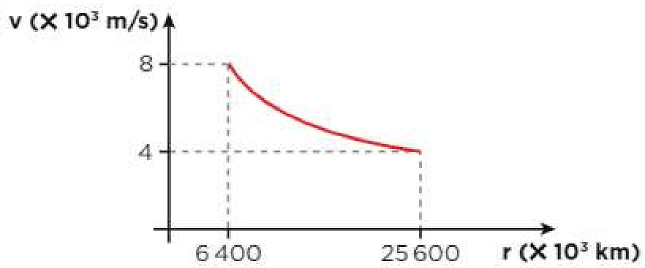
$r_p = 1.10^{-4}$(1,5 . 10$^{8}$ km)

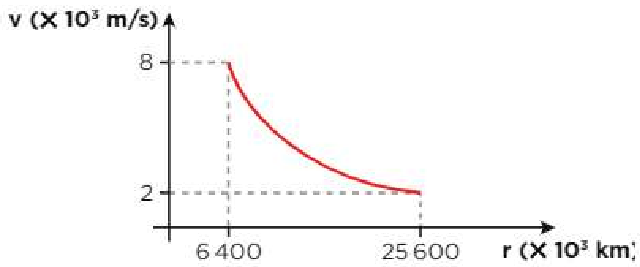
$r_p = 1.10^{-4}$. 1,5 . 10$^{8}$ . 10$^{3}$ m

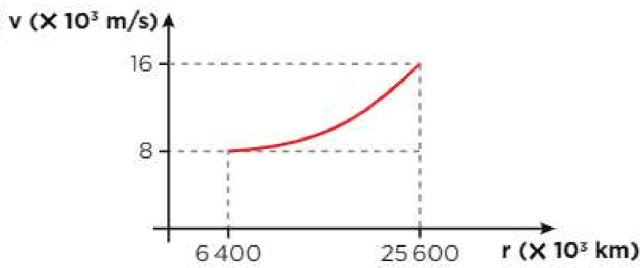
$r_p = 1{,}5 . 10^{7}$ m

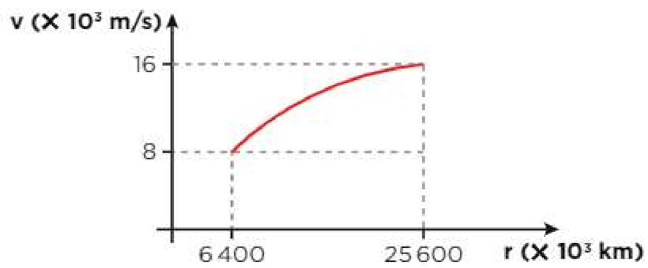
2. Segundo a revista Superinteressante do dia 4 de julho de 2018, cerca de 2 783 satélites orbitam a Terra. Sabe-se que essas órbitas ocorrem em diferentes altitudes. Muitos desses satélites estão em órbita circular, ou seja, executam movimento circular e uniforme (MCU). O campo gravitacional na superfície da Terra é 10 N/kg e o raio da Terra (distância entre a superfície da Terra e seu centro admitindo que seu formato seja esférico) é 6 400 km. Considerando a situação descrita, qual esboço gráfico representa a intensidade da velocidade v desenvolvida por satélites em órbita circular em relação aos seus raios r de órbita?

a)



b)



c)



d)



e)


2. Segundo a revista Superinteressante do dia 4 de julho de 2018, cerca de 2 783 satélites orbitam a Terra. Sabe-se que essas órbitas ocorrem em diferentes altitudes. Muitos desses satélites estão em órbita circular, ou seja, executam movimento circular e uniforme (MCU). O campo gravitacional na superfície da Terra é 10 N/kg e o raio da Terra (distância entre a superfície da Terra e seu centro admitindo que seu formato seja esférico) é 6 400 km. Considerando a situação descrita, qual esboço gráfico representa a intensidade da velocidade v desenvolvida por satélites em órbita circular em relação aos seus raios r de órbita?

$$R_c = F_g$$

$$\cancel{m}.a_c = \cancel{m}.g$$

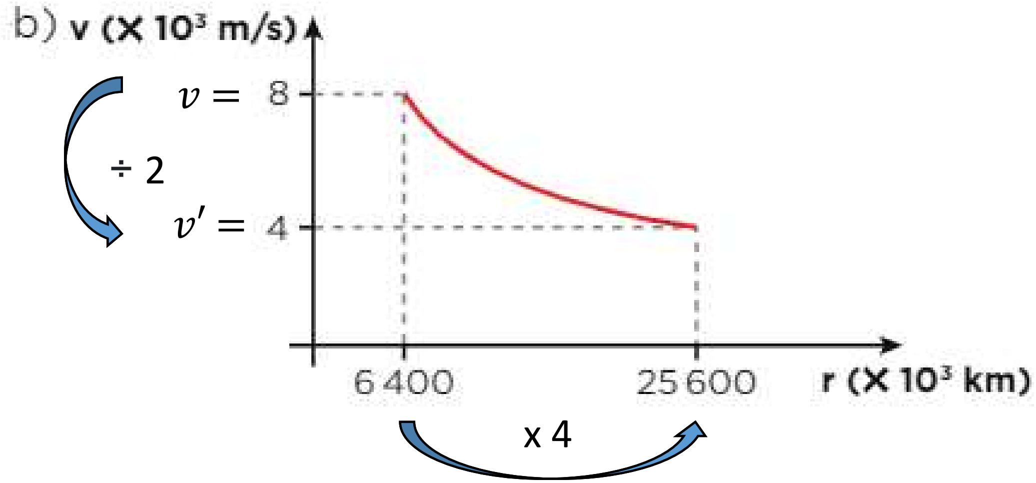
$$a_c = g$$

$$\frac{v^2}{r} = g$$

$$\frac{v^2}{\cancel{r}} = G.\frac{M}{r^{\cancel{2}}}$$

$$v^2 = G.\frac{M}{r}$$

$$\downarrow v = \sqrt{G.\frac{M}{r\uparrow}}$$




$$v = \sqrt{G.\frac{M}{r}} \rightarrow v' = \sqrt{G.\frac{M}{4r}} \rightarrow v' = \frac{1}{2}\sqrt{G.\frac{M}{r}} \rightarrow v' = \frac{1}{2}.\,v$$

2. Segundo a revista Superinteressante do dia 4 de julho de 2018, cerca de 2 783 satélites orbitam a Terra. Sabe-se que essas órbitas ocorrem em diferentes altitudes. Muitos desses satélites estão em órbita circular, ou seja, executam movimento circular e uniforme (MCU). O campo gravitacional na superfície da Terra é 10 N/kg e o raio da Terra (distância entre a superfície da Terra e seu centro admitindo que seu formato seja esférico) é 6 400 km. Considerando a situação descrita, qual esboço gráfico representa a intensidade da velocidade v desenvolvida por satélites em órbita circular em relação aos seus raios r de órbita?

$$R_c = F_g$$

$$\cancel{m}.a_c = \cancel{m}.g$$

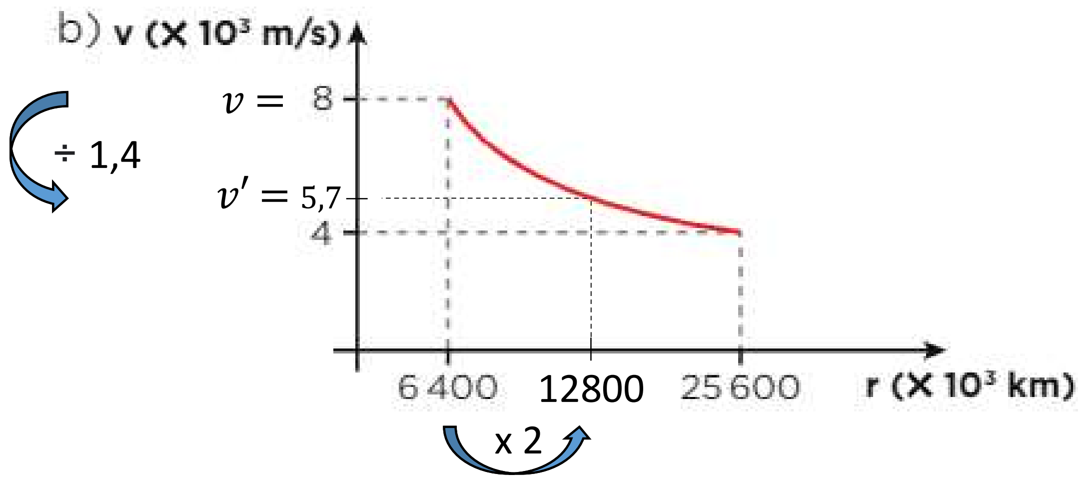
$$a_c = g$$

$$\frac{v^2}{r} = g$$

$$\frac{v^2}{\cancel{r}} = G.\frac{M}{r^{\cancel{2}}}$$

$$v^2 = G.\frac{M}{r}$$

$$\downarrow v = \sqrt{G.\frac{M}{r\uparrow}}$$




$$v = \sqrt{G.\frac{M}{r}} \rightarrow v' = \sqrt{G.\frac{M}{2r}} \rightarrow v' = \frac{1}{1,4}\sqrt{G.\frac{M}{r}} \rightarrow v' = \frac{1}{1,4} . \boldsymbol{v}$$

3. O texto a seguir refere-se à questão 3.

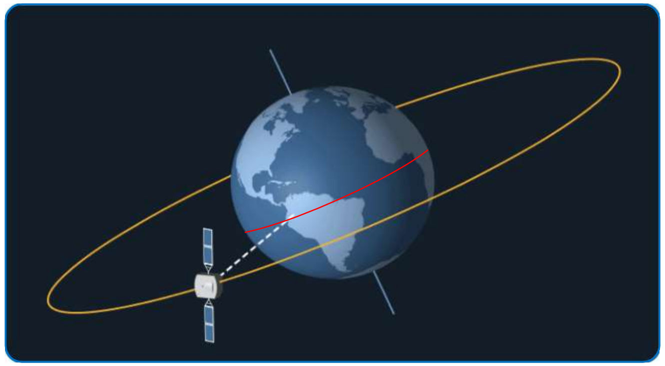
Primeiro satélite geoestacionário brasileiro chega ao espaço

O primeiro satélite geoestacionário brasileiro foi lançado ao espaço com sucesso por volta das 19:00 desta quinta-feira, 4 de maio, do Centro Espacial de Kourou, na Guiana Francesa. Segundo a assessoria do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC), a janela de lançamento começava às 17:15 (horário de Brasília) e ia até às 20:20. [...]

Pago por dois ministérios, o Satélite Geoestacionário de Defesa e Comunicações (SGDC) dará autonomia às Forças Armadas, fornecendo um canal de comunicação autônomo e totalmente operado no Brasil. Atualmente, os militares precisam alugar o serviço de satélites de outros países.
O SGDC também é parte essencial do Plano Nacional de Banda Larga (PNBL), criado em 2010 pelo governo federal com a missão de universalizar o acesso à internet de alta velocidade no Brasil. Grande parte do sinal do satélite geoestacionário servirá a este fim, levando internet banda larga a comunidades desconectadas nos cantos mais remotos do país. [...]

Órbita geoestacionária

É uma espécie de cinturão com mais de 400 satélites cujas órbitas acompanham a rotação da Terra. Por isso, o SGDC estará sempre no mesmo ponto do céu para observadores na superfície, fornecendo comunicação ininterrupta com o território brasileiro e o Oceano Atlântico.



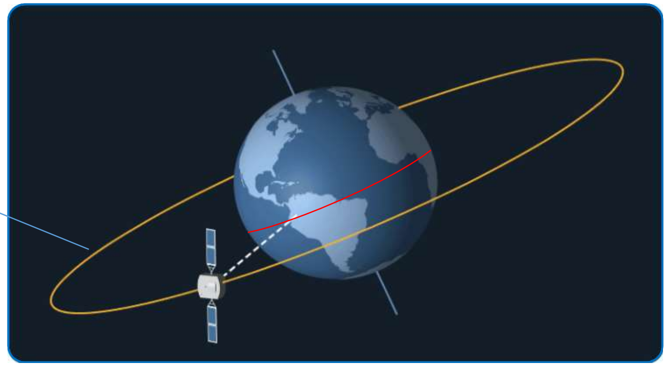
3. O cinturão ao qual o texto se refere é chamado de anel de Clarke e tem formato de uma circunferência de raio r e se encontra em um plano cuja latitude é $\theta$. Quais são os valores de r e $\theta$?

| | r (km) | θ (graus) |
|---|---|---|
| a) | 42000 | 90 |
| b) | 35600 | 60 |
| c) | 35600 | 60 |
| d) | 42000 | 0 |
| e) | 35600 | 0 |

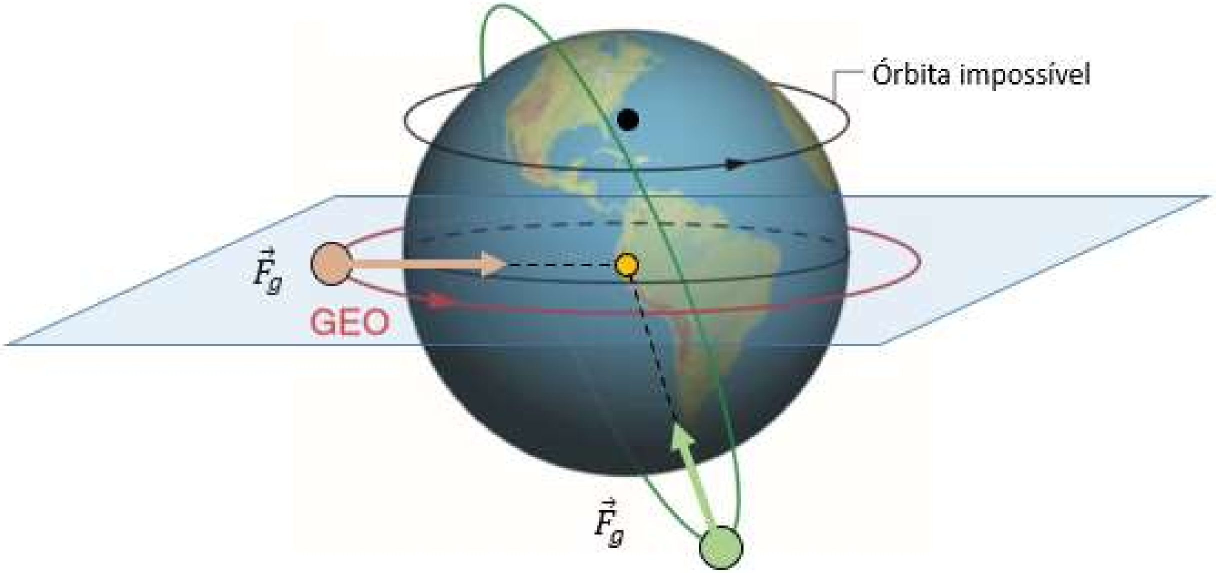
Note e adote:

- 24 h = 86400 s
- Massa da Terra = $6 \cdot 10^{24}$ kg
- $G = 6 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²
- $\pi^2 = 10$

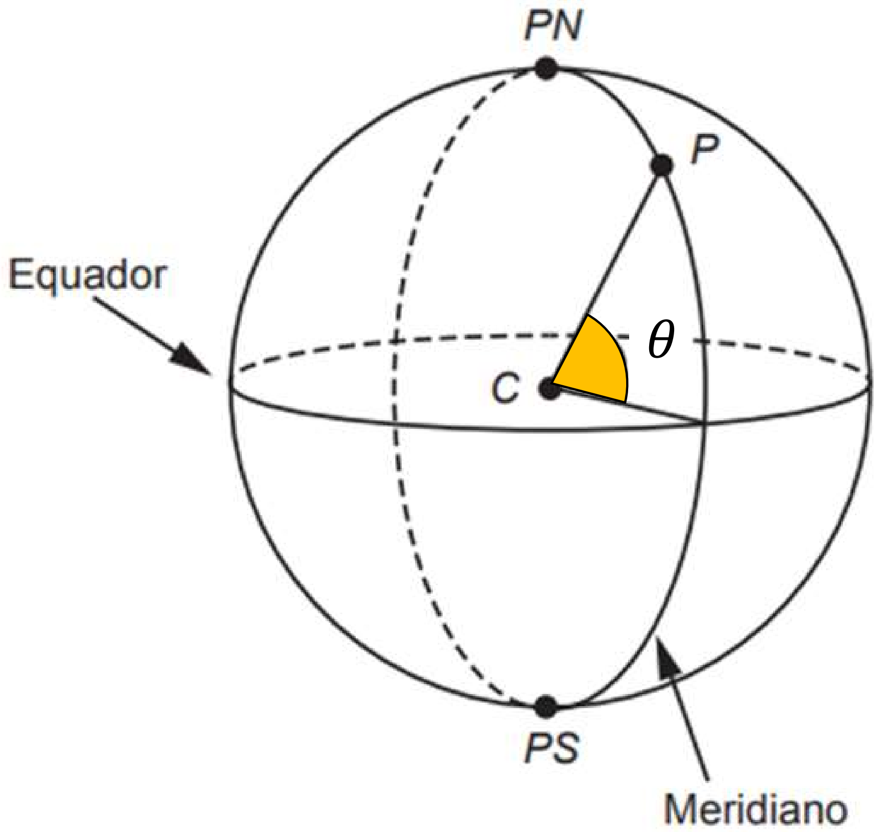

Anel de Clarke



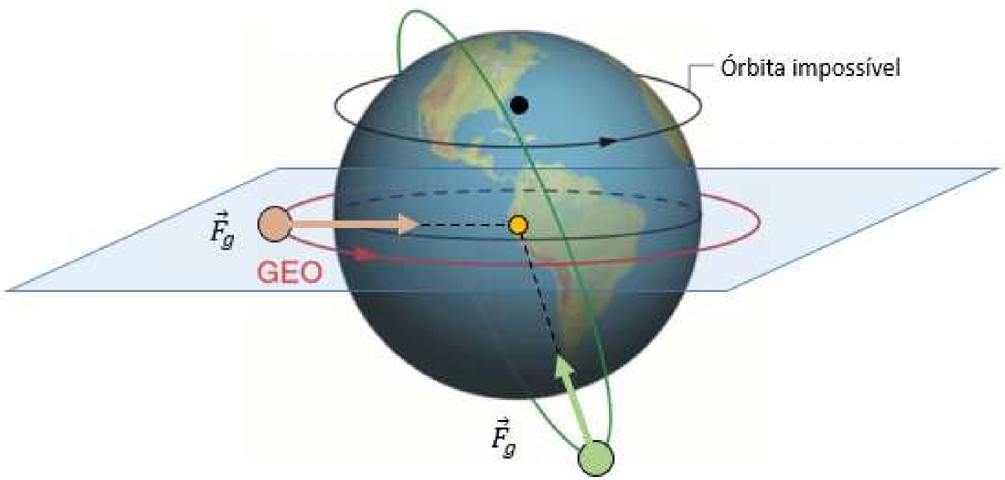
3. O cinturão ao qual o texto se refere é chamado de anel de Clarke e tem formato de uma circunferência de raio r e se encontra em um plano cuja latitude é $\theta$. Quais são os valores de r e $\theta$?




$Latitude\ (\theta)$ = 0°



3. O cinturão ao qual o texto se refere é chamado de anel de Clarke e tem formato de uma circunferência de raio r e se encontra em um plano cuja latitude é $\theta$. Quais são os valores de r e $\theta$?




Note e adote:

- 24 h = 86 400 s
- Massa da Terra = $6 \cdot 10^{24}$ kg
- G = $6 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²
- $\pi^2 = 10$

$$R_c = F_g$$

$$\cancel{m}.a_c = \cancel{m}.g$$

$$a_c = g$$

$$\omega^2.r = g$$

$$\omega^2.r = G.\frac{M}{r^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.r = G.\frac{M}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2}.r = G.\frac{M}{r^2}$$

$$r^3 = G.\frac{T^2\,M}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{G.\frac{T^2 M}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{6{,}67.10^{-11}.\frac{86400^2.6.10^{24}}{4.3^2}}$$

$$\boxed{r \cong 42\,000\,000 \text{ m} = 42\,000 \text{ km}}$$

3. O cinturão ao qual o texto se refere é chamado de anel de Clarke e tem formato de uma circunferência de raio r e se encontra em um plano cuja latitude é $\theta$. Quais são os valores de r e $\theta$?

| | r (km) | $\theta$ (graus) |
|---|---|---|
| a) | 42000 | 90 |
| b) | 35600 | 60 |
| c) | 35600 | 60 |
| d) | 42000 | 0 |
| e) | 35600 | 0 |

Note e adote:

- 24 h = 86400 s
- Massa da Terra = $6 \cdot 10^{24}$ kg
- $G = 6 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
- $\pi^2 = 10$

4. (Fuvest-SP) Alienígenas desejam observar o nosso planeta. Para tanto, enviam à Terra uma nave N, inicialmente ligada a uma nave auxiliar A, ambas de mesma massa. Quando o conjunto de naves se encontra muito distante da Terra, sua energia cinética e sua energia potencial gravitacional são muito pequenas, de forma que a energia mecânica total do conjunto pode ser considerada nula. Enquanto o conjunto é acelerado pelo campo gravitacional da Terra, sua energia cinética aumenta e sua energia potencial fica cada vez mais negativa, conservando a energia total nula. Quando o conjunto N-A atinge, com velocidade $v_0$ (a ser determinada), o ponto P de máxima aproximação da Terra, a uma distância $r_0$ de seu centro, um explosivo é acionado, separando N de A. A nave N passa a percorrer, em torno da Terra, uma órbita circular de raio $R_0$, com velocidade $v_N$ (a ser determinada). Suponha que a Terra esteja isolada no espaço e em repouso.

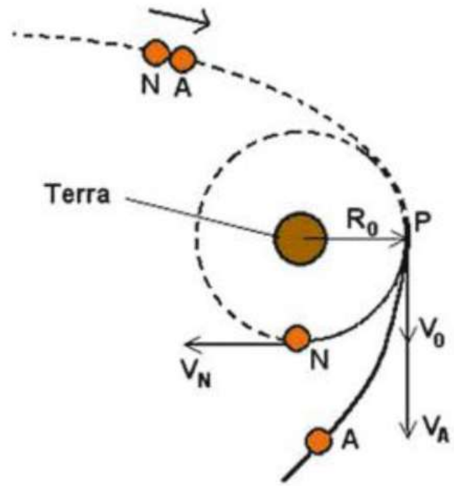
Determine, em função de M, G e $R_0$,

a) a velocidade $v_0$ com que o conjunto atinge o ponto P.

b) a velocidade $v_N$, de N, em sua órbita circular.

Note e adote

- A força de atração gravitacional F, entre um corpo de massa **m** e o planeta Terra, de massa M, é dada por $F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot g \cdot \cancel{R}$
- A energia potencial gravitacional $E_P$ do sistema formado pelo corpo e pelo planeta Terra, com referencial de potencial zero no infinito, é dada por: $E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$
- G: constante universal da gravitação.
- R: distância do corpo ao centro da Terra.
- $g_R$: aceleração da gravidade à distância R do centro da Terra.



Quando o conjunto de naves se encontra muito distante da Terra, sua energia cinética e sua energia potencial gravitacional são muito pequenas, de forma que a energia mecânica total do conjunto pode ser considerada nula.

Enquanto o conjunto é acelerado pelo campo gravitacional da Terra, sua energia cinética aumenta e sua energia potencial fica cada vez mais negativa, conservando a energia total nula. Quando o conjunto N-A atinge, com velocidade $v_0$ (a ser determinada), o ponto P de máxima aproximação da Terra, a uma distância $r_0$ de seu centro, um explosivo é acionado

Note e adote

- A força de atração gravitacional F, entre um corpo de massa **m** e o planeta Terra, de massa M, é dada por $F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot g \cdot \cancel{R}$
- A energia potencial gravitacional $E_P$ do sistema formado pelo corpo e pelo planeta Terra, com referencial de potencial zero no infinito, é dada por: $E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$
- G: constante universal da gravitação.
- R: distância do corpo ao centro da Terra.
- $g_R$: aceleração da gravidade à distância R do centro da Terra.

Determine, em função de M, G e $R_0$,

a) a velocidade $v_0$ com que o conjunto atinge o ponto P.

$$E_{m\,(i)} = E_{m\,(f)}$$

$$0 = E_{c\,(f)} + E_{p\,(f)}$$

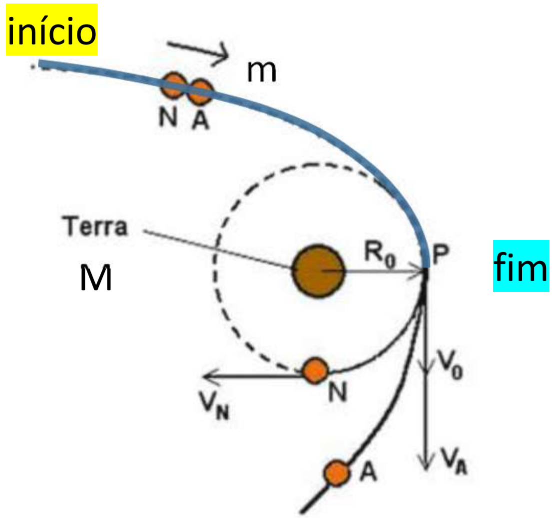
$$0 = \frac{m.v_f{}^2}{2} - \frac{GMm}{r_f}$$

$$0 = \frac{m.v_f{}^2}{2} - \frac{GMm}{r_f}$$

$$\frac{\cancel{m}.v_f{}^2}{2} = \frac{GM\cancel{m}}{r_f}$$

$$v_f{}^2 = \frac{2GM}{r_f}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}}$$



A nave N passa a percorrer, em torno da Terra, uma órbita circular de raio $R_0$, com velocidade $v_N$ (a ser determinada). Suponha que a Terra esteja isolada no espaço e em repouso.

Determine, em função de M, G e $R_0$,

b) a velocidade $v_N$, de N, em sua órbita circular.

$$R_c = F_g$$

$$\cancel{m}'.a_c = \cancel{m}'.g$$

$$a_c = g$$

$$\frac{v^2}{r} = g$$

$$\frac{v^2}{\cancel{r}} = G.\frac{M}{r^{\cancel{2}}}$$

$$v^2 = G.\frac{M}{r}$$

$$v = \sqrt{G.\frac{M}{r}}$$

$$\boxed{v_N = \sqrt{G.\frac{M}{R_0}}}$$

Note e adote

- A força de atração gravitacional F, entre um corpo de massa **m** e o planeta Terra, de massa M, é dada por $F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot g \cdot \cancel{R}$
- A energia potencial gravitacional $E_P$ do sistema formado pelo corpo e pelo planeta Terra, com referencial de potencial zero no infinito, é dada por: $E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$
- G: constante universal da gravitação.
- R: distância do corpo ao centro da Terra.
- $g_R$: aceleração da gravidade à distância R do centro da Terra.