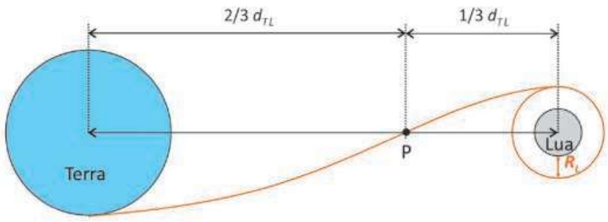
APRIMORANDO HABILIDADES

Aula 33

1 (Fuvest-SP) Em janeiro de 2019, a sonda chinesa *Chang'e 4* fez o primeiro pouso suave de um objeto terrestre no lado oculto da Lua, reavivando a discussão internacional sobre programas de exploração lunar.



Considere que a trajetória de uma sonda com destino à Lua passa por um ponto *P*, localizado a $\frac{2}{3}d_{TL}$ do centro da Terra e a $\frac{1}{3}d_{TL}$ do centro da Lua, sendo d_{TL} a distância entre os centros da Terra e da Lua.

> Note e adote:
> - O módulo da força gravitacional entre dois objetos de massas *M* e *m* separados por uma distância ***d*** é dado por $F = \frac{G\cdot M\cdot m}{d^2}$.
> - A energia potencial gravitacional correspondente é dada por $U = -\frac{G\cdot M\cdot m}{d}$.
> - Assuma a distância da Terra à Lua como sendo constante.

a) Considerando que a massa da Terra é cerca de 82 vezes maior que a massa da Lua, determine a razão $\frac{F_T}{F_L}$ entre os módulos da força gravitacional que a Terra e a Lua, respectivamente, exercem sobre a sonda no ponto P.

Como $F = \frac{G\cdot M\cdot m}{d^2}$, então:

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{\dfrac{\cancel{G}\cdot M_T\cdot \cancel{m}}{\left(\frac{2}{3}d_{TL}\right)^2}}{\dfrac{\cancel{G}\cdot M_L\cdot \cancel{m}}{\left(\frac{1}{3}d_{TL}\right)^2}} = 82\,\frac{\dfrac{M_L}{4\,d_{TL}^{\,2}}}{\dfrac{M_L}{d_{TL}^{\,2}}}$$

$$\therefore \frac{F_T}{F_L} = 20{,}5$$

Ao chegar próximo à Lua, a sonda foi colocada em uma órbita lunar circular a uma altura igual ao raio da Lua (R_L) acima de sua superfície, como mostra a figura. Desprezando os efeitos da força gravitacional da Terra e de outros corpos celestes ao longo da órbita da sonda,

b) Determine a velocidade orbital da sonda em torno da Lua em termos da constante gravitacional *G*, da massa da Lua M_L e do raio da Lua R_L;

Estando a sonda em órbita em torno da Lua:

$$R_{cp} = F_g \Rightarrow \frac{m\cdot v^2}{2\,R_L} = \frac{G\cdot M_L\cdot m}{(2\,R_L)^2}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{G\cdot M_L}{2\,R_L}}$$

c) Determine a variação da energia mecânica da nave quando a altura da órbita, em relação à superfície da Lua, é reduzida para $0{,}5R_L$. Expresse seu resultado em termos de G, R_L, M_L e da massa da sonda m_s.

Quando o corpo está a uma distância R_L da superfície da Lua, sua energia mecânica é:

$$E_{m\,i} = \frac{m\cdot v^2}{2} + \left(-\frac{G\cdot M_L\ m}{2\cdot R_L}\right),\ \text{em que } v^2 = \frac{G\cdot M_L}{2\cdot R_L},\ \text{conforme o}$$

item anterior.

Assim,

$$E_{m\,i} = \frac{G\cdot M_L\cdot m}{4\cdot R_L} - \frac{G\cdot M_L\ m}{2\cdot R_L} = -\frac{G\cdot M_L\cdot m}{4\cdot R_L}\quad \text{(I)}$$

Para a situação do corpo a uma altura 0,5 R_L da superfície da Lua, sua energia mecânica é:

$$E_{m\,f} = \frac{m\cdot v_f^2}{2} + \left(-\frac{G\cdot M_L\ m}{1{,}5\cdot R_L}\right),\ \text{em que } v_f^2 = \frac{G\cdot M_L}{1{,}5\cdot R_L}$$

Assim,

$$E_{m\,f} = \frac{G\cdot M_L\cdot m}{3\cdot R_L} - \frac{2\cdot G\cdot M_L\ m}{3\cdot R_L} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{G\cdot M_L\cdot m}{R_L}\ \text{(II)}$$

Portanto, a variação de energia mecânica será:

$$\Delta E_{mec} = E_{m\,f} - E_{m\,i} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{G\cdot M_L\cdot m}{R_L} - \left(-\frac{G\cdot M_L\cdot m}{4\cdot R_L}\right)$$

$$\therefore \Delta E_{mec} = -\frac{G\cdot M_L\cdot m}{12\cdot R_L}$$

APRIMORANDO HABILIDADES

Aula 34

2 Um corpo de massa m vai ser lançado de um ponto A que está a uma distância $r = R\sqrt{2}$ do centro da Terra, sendo R o raio terrestre. A intensidade do campo gravitacional na superfície da Terra é $g = 10$ N/kg. Admitindo que no local do lançamento não há atmosfera, pede-se:

Adote:
- $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ m;
- $\sqrt{2\sqrt{2}} \approx 1{,}7$.

a) A intensidade do campo gravitacional no local do lançamento.

A intensidade do campo gravitacional no ponto A pode ser calculada pela expressão

$g_A = \dfrac{G \cdot M}{r^2}$, sendo $r = R\sqrt{2}$ a distância do ponto A ao centro da Terra.

$$\left.\begin{array}{l} g_A = \dfrac{G \cdot M}{r^2} \\ r = R\sqrt{2} \end{array}\right\} g_A = \dfrac{G \cdot M}{\left(R\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{G \cdot M}{4 \cdot R^2}$$

Se a intensidade do campo gravitacional na superfície terrestre é $g_{sup} = 10$ N/kg e $g_{sup} = \dfrac{G \cdot M}{R^2}$, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} g_{sup} = \dfrac{G \cdot M}{R^2} = 10 \\ g_A = \dfrac{G \cdot M}{4 \cdot R^2} \end{array}\right\} g_A = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$$

A intensidade do campo gravitacional no ponto de lançamento é $g_A = 2{,}5$ N/kg.

b) A menor velocidade com que o corpo deve ser lançado para não retornar mais à Terra pela ação exclusiva do seu campo gravitacional.

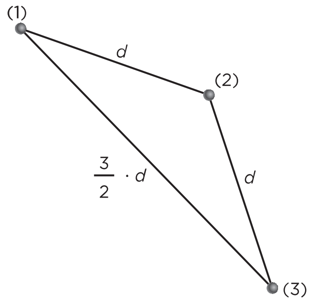
A velocidade procurada é chamada velocidade de escape (v_e) no ponto de lançamento A, e pode assim ser calculada:

$$\left.\begin{array}{l} v_e = \sqrt{2 \cdot g_A \cdot r} \\ g_A = 2{,}5 \\ r = R \cdot \sqrt{2} = 6{,}4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{2} \end{array}\right\} v_e = \sqrt{2 \cdot 2{,}5 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{2}}$$

$$v_e = \sqrt{32 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{2}} = 4 \cdot 10^3 \cdot \underbrace{\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}_{\approx 1{,}7} = 6{,}8 \cdot 10^3$$

A velocidade de escape do objeto no ponto de lançamento vale $v_e = 6{,}8 \cdot 10^3$ m/s.

3 O esquema a seguir representa um sistema de três corpos, cada um com massa M.



Sendo G a constante universal da gravitação, pede-se, em função de M, G, d:

a) A energia potencial $(E_p)_{sist}$ do sistema de corpos.

A energia potencial gravitacional é associada a cada par de corpos. Assim, a energia potencial associada ao sistema de três corpos ser obtida da seguinte forma:

$$(E_p)_{sist} = (E_p)_{1,2} + (E_p)_{1,3} + (E_p)_{2,3}$$

$$(E_p)_{sist} = -\dfrac{G \cdot M \cdot M}{r_{1,2}} - \dfrac{G \cdot M \cdot M}{r_{1,3}} - \dfrac{G \cdot M \cdot M}{r_{2,3}}$$

Substituindo

$(E_p)_{1,2} = -\dfrac{G \cdot M^2}{d}$,

$(E_p)_{1,3} = -\dfrac{G \cdot M^2}{\frac{3d}{2}}$

e $(E_p)_{2,3} = -\dfrac{G \cdot M^2}{d}$, na equação anterior, obtemos:

$$(E_p)_{sist} = (E_p)_{1,2} + (E_p)_{1,3} + (E_p)_{2,3} = -\dfrac{8 \cdot G \cdot M^2}{3 \cdot d}$$

b) Caso os três corpos sejam abandonados, a tendência de movimento é que eles se aproximem ou se afastem? Justifique em função da variação da energia potencial gravitacional.

Ao serem abandonados, a tendência é que os corpos se aproximem, pois, quando a distância entre os corpos diminui, a energia potencial gravitacional também diminui.